



Çizgelerin Castelnovo-Mumford Regülaritesi
ve
Döngü-Kıran Komplekslerinin Topolojisi

Program Kodu: 1001

Proje No: 111T704

Proje Yürütücüsü:

Prof. Dr. Yusuf CİVAN (SDÜ)

Araştırmacı(lar):

Doç. Dr. Türker BIYIKOĞLU (İYTE)

Bursiyerler:

Zakir DENİZ (SDÜ)

Demet TAYLAN (SDÜ & BOZOK ÜN.)

Hakan GÜLER

Ekim 2014

ANKARA



ÖNSÖZ

Bu proje bir tetrahedronun dört köşesi olarak kabul edebileceğimiz topoloji, değişmeli cebir, ayrık geometri ve çizgeler kuramı dörtlüsünün arakesitinde, kendisine matematikte olduğu kadar diğer temel bilim disiplinlerinde önemli bir yer bulmuş Castelnuovo-Mumford regülaritenin hesaplanması ve bu hesaplarda kullanılacak gerekli araçların inşası ve ayrıca çizgeler ile ilintili bir değişmez olan döngü-kıran sayısının hesaplanması ve bu hesap için topolojik yöntemlerin geliştirilmesini amaçlamıştır.

Her iki nümerik değişmezin belirlenmesi yönünde literatürde var olan çalışmaların göreceli olarak yeni olması dikkate alındığında, bu aktif alanda Türk Matematiğinin de söz sahibi olabilmesi noktasında TÜBİTAK ın bize sunmuş olduğu desteğe sonsuz teşekkürlerimizi sunarız.

Prof Dr Yusuf CİVAN
Doç Dr Türker BIYIKOĞLU

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
1.1. Bulgular Dökümü	7
2. LİTERATÜR ÖZETİ	10
2.1. Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regülaritesi	10
2.2. Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi	12
3. GEREÇ VE YÖNTEMLER	13
3.1. Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regülaritesi	13
3.1.1. Bilgisayar Destekli Hesaplamalar	14
3.2. Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi	15
4. BULGULAR	16
4.1. Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regülaritesi	16
4.1.1. Kare-serbest ideallerin regülaritesi	16
4.1.2. Çizge operasyonları ve regülarite	17
4.1.3. Köşe-parçalanabilir çizgeler	18
4.1.4. Ardıl-sökülebilir çizgeler	19
4.1.5. Asal çizgeler	22
4.1.6. $2K_2$ -serbest çizgelerin regülaritesi	24
4.1.7. Büzme, genleştirme ve regülarite	25
4.2. Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi	29
4.2.1. Çizgelerin yoksunluk kompleksleri	29
4.2.2. Turnuva yönlü çizgelerin döngü-kıran kompleksleri	31
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	35
5.1. Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regülaritesi	35
5.2. Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi	36



6. KAYNAKÇA	37
7. PROJE ÖZET BİLGİ FORMU	42

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.1. R_n çizgesi.	5
4.1. Lozin dönüşümü.	17
4.2. 8 köşeli ve $reg > im$ olan iki ardıl-sökülebilir çizge	21
4.3. Asal çizge.	23
4.4. g -büzme.	26
4.5. g -genleşme.	26
4.6. C_8 döngü çizgesinin t -genleşme ve ardışık t -büzmeleri.	28
4.7. Güçlü-parçalanabilir bir turnuva ve onun güçlü-parçalanışı.	33
4.8. Bir 3-kesitli turnuva.	33



SİMGELER DİZİNİ

$V(G)$	G nin köşelerinin kümesi
$E(G)$	G nin kenarlarının kümesi
$ G $	G nin mertebesi
$\ G\ $	G nin boyutu
P_n	n -köşeli yol
C_n	n -köşeli döngü
K_n	n -köşeli tam çizge
\overline{G}	G nin bütünleyeni
$G - U$	G den U in köşelerinin atılması
$\alpha(G)$	G çizgesinin bağımsızlık sayısı
$\gamma(G)$	G nin minimum baskınlık sayısı
$d_G(v)$	v köşesinin G deki derecesi
$\omega(G)$	G çizgesinin tamsal sayısı
$N_G(v)$	v köşesinin komşularının kümesi
$N_G[v]$	v köşesinin (kapalı) komşuluğu
$G[S]$	G nin S tarafından indirgenmiş altçizgesi
$\delta(G)$	G nin minimum derecesi
$\Delta(G)$	G nin maksimum derecesi
$\nu(G)$	G nin köşe-örtüm sayısı
$m(G)$	G nin eşleme sayısı



$\text{im}(G)$	G nin indirgenmiş eşleme sayısı
$\text{vim}(G)$	G nin sanal indirgenmiş eşleme sayısı
$\text{reg}(G)$	G nin regülaritesi
$\text{Ind}(G)$	G nin bağımsızlık kompleksi
$\text{der}(G)$	G nin bağımsızlık kompleksinin derinliği
$\text{der}(\vec{G})$	\vec{G} yönlü-çizgesinin döngü-kıran kompleksinin derinliği
$\text{homboy}(\Delta)$	Δ nin homoloji boyutu
$\Lambda(G)$	G nin döngü-kıran kompleksi
$\mathcal{D}(G; \mathcal{F})$	G nin \mathcal{F} ailesiyle parametrize edilmiş yoksunluk kompleksi
$\text{Dom}(G)$	G nin baskınlık (hakimiyet) kompleksi
$\chi(G)$	G nin köşe kromatik sayısı



TERMİNOLOJİ DİZİNİ

clique	tamlık
independent set	bağımsız küme
vertex-cover number	köşe-örtüm sayısı
chordal graph	üçgensel çizge
cochordal graph	ardıl-üçgensel çizge
shedding vertex	döküm köşesi
vertex-decomposable	köşe-parçalanabilir
dominated vertex	hükümlü köşe
dismantlable	sökülebilir
codominated vertex	ardıl-hükümlü köşe
codismantlable	ardıl-sökülebilir
bipartite graph	iki-çoklu çizge
square-free monomial ideal	kare-serbest monomial ideal
devoid complex	yoksunluk kompleksi
decycling complex	döngü-kıran kompleksi
forest number	orman sayısı
decycling (feedback) number	döngü-kıran sayısı
tournament digraph	turnuva yönlü çizgesi
girth	kuşak



well-covered graph

iyi-örtümlü çizge

H-free

H-yoksun veya *H*-serbest

distance-hereditary graph

uzaklık-kalıtsal çizge

dominance complex

baskınlık (hakimiyet) kompleksi

sectionable tournament

kesitlenebilir turnuva

contractible

büzülebilir

homological dimension

homoloji boyutu



Proje Başlığı: Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regülaritesi ve Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi

ÖZET

Bu proje çalışmasının iki temel amacı vardır. Bunlardan ilki, en genel anlamıyla her hangi bir kare-serbest monomial I idealinin Castelnuovo-Mumford regülaritesinin hesaplanması ve bu hesapta kullanılacak etkin yöntemlerin keşfedilmesi olarak betimlenebilir. Genel olarak regülarite hesabı oldukça zor olduğu için direkt hesaplamaların yanısıra regülariteye altan veya üstten etkin sınırların bulunması da önemli bir işlem olarak kabul görmektedir. Her ne kadar regülarite bir cebirsel değişmez olsa da, bu çalışmanın temel yaklaşımı kombinatoriyaldir. Özellikle çizgeler teorisinin temel enstrümanları bu değişmezin hesaplanması veya sınırlandırılmasında etkin bir şekilde kullanılmıştır.

Bu amaç doğrultusunda proje kapsamında ulaşılan sonuçlar temel başlıklar altında şöyledir:

- Her hangi bir kare-serbest monomial idealin regülaritesinin ilintili bir iki-çoklu çizgeden hesaplanabileceği ispatlanmıştır.
- Köşe-parçalanabilir ve ardıl-sökülebilir çizgelerin regülariteleri belirlenmiştir.
- Asal çizge kavramı tanımlanarak, regülarite hesabının bir çizgenin indirgenmiş asal parçalanışlarının bulunması problemiyle eşlenmiştir.
- $2K_2$ -serbest ve regülaritesi istenildiği kadar büyük çizgelerin varlığı tespit edilmiştir.
- Çizge operasyonlarının regülariteye etkileri tespit edilmiştir.

İkinci amacımız, çizgelerin döngü-kıran komplekslerinin veya daha genel haliyle yoksunluk komplekslerinin topolojisini incelemek olmuştur. Bu komplekslerin (topolojik) bağlantılılık sayılarının çizgelerin bir takım bilinen nümerik değişmezlerin belirlenmesinde veya sınırlandırılmasında etki sahibi olması, bu noktadaki çalışmalarımızın temel motivasyonu olmuştur.

Bu ikinci amaç doğrultusunda proje kapsamında ulaşılan sonuçlar temel başlıklar altında şöyledir:

- Çizgelerin yoksunluk komplekslerinin homotopik yapılarının belirlenmesi için kullanılacak indirgeme yöntemleri belirlenmiş ve Morse-eşlemelerinin inşası yapılmıştır.
- Geliştirilen yöntemlerle bizi çizge sınıfları için homotopi hesapları tamamlanmıştır.
- Kesitli turnuva yönlü çizgelerin döngü-kıran komplekslerinin homotopik yapıları belirlenmiş ve buradan elde edilen bilgiler altında kromatik sayıları ve döngü-kıran sayılarına keskin sınırlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Castelnuovo-Mumford regülarite, kare-serbest monomial ideal, bağımsızlık kompleksi, indirgenmiş eşleme sayısı, yoksunluk kompleksi, Morse-eşleme, döngü-kıran sayısı.



Project Title: Castelnuovo-Mumford regularity of graphs and topology of decycling complexes

ABSTRACT

There are two particular aims of this project. The first one can be described as the computation of Castelnuovo-Mumford regularity of square-free monomial ideals as well as inventing applicable computational machineries for that purpose. As the computation of the regularity is in general a difficult task, finding effective bounds on such an invariant can also be counted as an important contribution. Even if the regularity is an algebraic invariant, our main approach is combinatorial. The instruments of graph theory are our main tools when finding the exact value or establishing tight bounds on the regularity.

The main contribution of this project on that manner can be summarized as follows:

- proved that for any square-free monomial ideal I , there exists a bipartite graph $\mathfrak{B}(I)$ such that $\text{reg}(I) = \text{reg}(\mathfrak{B}(I))$.
- determined the regularity of vertex-decomposable and codismantlable graphs.
- introduced the notion of a prime graph, and verified that the computation of the regularity is nothing but finding induced prime decompositions of graphs.
- showed that there exist $2K_2$ -free graphs with arbitrarily high regularity.
- investigated the effects of graph operations on the regularity.

Our second task is the investigation of topological structures of decycling complexes or in a more general case the devoid complexes of graphs. Our main motivation comes from the fact that the homotopical informations on these complexes can determine or can be used to bound some of the graph invariants.

For that purpose, our contribution can be summarized as follows:

- introduced some splitting and reduction techniques and described how to build Morse-matchings on these complexes in order to compute their homotopy types.
- computed homotopy types of some devoid complexes.
- computed homotopy types of sectionable tournaments, and via that knowledge, provided tight upper bounds on their chromatic and feedback numbers.

Keywords: Castelnuovo-Mumford regularity, square-free monomial ideal, independence complex, induced matching number, devoid complex, Morse-matching, decycling and feedback numbers.



1. GİRİŞ

Bu proje çalışması birbirinden bağımsız iki temel problemin çözümünü hedeflemektedir. Bu kapsamda ortaya konan problemlerin ve bu problemlere yönelik üretilen çözüm yöntemleri ve sonuçlarının rahatlıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları bu bölümde sunacağız. Çizgeler teorisinin güncel bilimin bir çok disiplini tarafından ilgi görmesi, ortak bir terim ve notasyon birliğinin sağlanması noktasında problemler üretmektedir. Bu bağlamda, bahsi geçen alanda üzerinde uzlaşmış ve genel anlamda kabul görmüş bir terminoloji mevcut değildir.

Son yıllarda matematiğin bir çok köklü disiplinin enstrümanları, çizgeler teorisinde ortaya çıkan problemlerin çözümü noktasında temel araç olarak kullanılmaya başlanmıştır. Topolojik kombinatorik ve kombinatoriyal değişmeli cebir alanlarının doğuşu bu yargıyı açıkça desteklemektedir. Bu ilişki aslında çift yönlü olarak çalışmaktadır. Diğer bir deyişle, kombinatoriyal yaklaşımlar, matematiğin bir çok alanında kendine etkin bir yer bulmuştur. Günümüzde bilinen bir çok teorisinin, kombinatoriyal versiyonunun (daha doğru bir ifadeyle "kesikli versiyon" (discretization)) ifade edilme çabası yeni açılımlara sebep vermiş, var olan bazı problemlerin çözümünde önemli bir araç haline gelmiştir. Bu proje çalışmasının en önemli çıktılarından bir tanesinde bu çift yönlü etkileşimin faydasını ortaya koymasındadır.

Her şeyin zamanla optimal hale getirilmeye çalışıldığı günümüz dünyasında, karşımıza çıkan problemleri çözmek kadar, problemlerin ve sunulan çözüm yöntemlerinin karmaşıklığını bilmekte önemli hale gelmiştir. Bu bağlamda, bu tip karmaşıklıkları ölçebilecek nümerik değişmezler olan ihtiyaç her alanda artmıştır. Bu yaklaşım doğal olarak matematiğin bir çok alanını da etkilemiştir. Örneğin, bir uzayın topolojik yapısını analiz ederken, onun global yapısını bilmek kadar, yerel yapısını algılamakta önemli bir işlev haline gelmiştir. Daha keskin bir ifadeyle, örneğin topolojik olarak büzülebilir bir uzayın içinde yatan bir boşluğu (a bounded hole) belirleyebilmek önem arz etmektedir. Bu tip gereksinimlerin rasyonel sebepleri, çoğunlukla bilgisayar bilimlerinde, mesela veri madenciliğinde ortaya çıkan problemlerden doğmaktadır. Elde edilen devasa veri bulutlarının analizinde karşımıza çıkan simpleksel komplekslerinin, global yapısı kadar, yerel yapısını belirleyebilmekte, bu analiz için önemli bir adım sayılmaktadır [53].

Castelnuovo-Mumford regülarite (veya sadece regülarite), bu tip yerel yapıların varlığını ve tespitinin belirlenmesi noktasında önemli bir nümerik değişmezdir. Bu bağlamda, regülarite üzerinde çalışılan bir objenin (simpleksel kompleks, modül, balya), genel yapısı kadar yerel yapısındaki karmaşıklığı ölçmek için kullanılacak önemli bir araçtır. Regülaritenin üzerinde çalışılan

objenin niteliğine göre farklı tanımları olsa da, bu tanımların denkleğini göstermek zor değildir. Biz burada simpleksel kompleksler için bu tanımları ifade edeceğiz. Ayrıca, konunun tarihsel gelişimine Literatür Özeti bölümünde detaylı olarak yer verilecektir.

Δ , bir (sonlu) V kümesi üzerinde simpleksel kompleks ve \mathbb{k} her hangi bir cisim olsun. Bu takdirde, Δ 'nin \mathbb{k} üzerindeki *Castelnuovo-Mumford regülaritesi*

$$\text{reg}_{\mathbb{k}}(\Delta) := \max\{j : \tilde{H}_{j-1}(\Delta[S]; \mathbb{k}) \neq 0 \text{ herhangi bir } S \subseteq V\},$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Delta[S] := \{F \in \Delta : F \subseteq S\}$ ailesi S kümesi tarafından Δ üzerinde indirgenen simpleksel altkompleksi ve $\tilde{H}_*(-; \mathbb{k})$ indirgenmiş singular homolojiyi göstermektedir. Bu tanımın değişmeli cebirdeki tanım ile aynı olduğunu Hochster formülünden görmek oldukça kolaydır. Gerçekten, $R = \mathbb{k}[V]$ ile \mathbb{k} üzerindeki polinom halkasını gösterecek olursak, Δ simpleksel kompleksine, *Stanley-Reisner ideal* olarak bilinen $I_{\Delta} = (x^F : F, \Delta \text{'nin bir yüzü değildir})$, kare-serbest monomial idealini ilintilendirebiliriz. Tersine, R üzerindeki her hangi böyle bir I ideali için, $I = I_{\Delta}$ olacak şekilde bir Δ simpleksel kompleksini bulunabilir. Bu karşılık getirmede $\text{reg}_{\mathbb{k}}(\Delta) = \text{reg}_{\mathbb{k}}(R/I)$ ve $\text{reg}_{\mathbb{k}}(I) = \text{reg}_{\mathbb{k}}(R/I) + 1$ eşitlikleri sağlanır.

$\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ bir (hiper)çizge olduğunda, bir $I \subseteq V$ altkümeye \mathcal{H} 'nin bir *bağımsız kümesi* diyeceğiz, eğer \mathcal{H} 'nin $F \subseteq I$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{E}$ kenarı mevcut değilse. Ayrıca, \mathcal{H} 'nin bağımsız kümelerinin ailesi V kümesi üzerinde \mathcal{H} 'nin *bağımsızlık kompleksi* olarak adlandıracağımız bir simpleksel kompleks $\text{Ind}(\mathcal{H})$ belirler. Buradan, herhangi bir $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ (hiper)çizgesinin regülaritesi, $\text{reg}_{\mathbb{k}}(\mathcal{H}) := \text{reg}_{\mathbb{k}}(\text{Ind}(\mathcal{H}))$ şeklinde tanımlanır. Bu özel durumda, yani $\Delta = \text{Ind}(\mathcal{H})$ olduğunda $\text{Ind}(\mathcal{H})$ kompleksinin ilintli Stanley-Reisner ideali $I_{\text{Ind}(\mathcal{H})}$, genel olarak \mathcal{H} 'nin *kenar ideali* olarak adlandırılmaktadır.

Her ne kadar birbirlerinden farklı disiplinlere ait olsalar da, simpleksel kompleksler, kare-serbest monomial idealler ve (basit) hiperçizgeler arasında bire-bir eşleme vardır.

$$\left\{ \begin{array}{c} V \text{ üzerindeki} \\ \text{simpleksel kompleksler} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{k}[V] \text{ deki} \\ \text{kare-serbest idealler} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} V \text{ üzerindeki} \\ \text{hiperçizgeler} \end{array} \right\}$$

Bu eşlemelerin ilki, yukarıda bahsi geçen Stanley-Reisner teoreminin bir sonucudur. İkincisi için, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ olmak üzere eğer I ideali $R = \mathbb{k}[V]$ üzerinde kare-serbest ve m_1, \dots, m_r monomialleri tarafından minimal olarak üretiliyorsa; her bir $i \in [r]$ için $F_i := \{x_j : x_j | m_i\}$ olarak tanım-

lanırsa $\mathcal{H}(I) = (V, \{F_1, \dots, F_r\})$ bir (basit) hiperçizgedir. Burada I ideali $\mathcal{H}(I)$ hiperçizgesinin kenar idealidir, dolayısıyla

$$\text{reg}(I) = \text{reg}(\mathcal{H}(I)) + 1 \quad (1.1)$$

eşitliği sağlanır.

Burada ifade edilen regülarite tanımının doğal bir kaç sonucu vardır. Öncelikle regülarite, katsayı cisminin karakteristiğine bağımlıdır (bknz Örnek 3.6, [35]). Diğer taraftan, regülarite bir topolojik değişmez değildir ve indirgenmiş simpleksel altkompleks operasyonuna göre monoton azalandır, yani herhangi bir $K \subseteq V$ altkütmesi için $\text{reg}_{\mathbb{k}}(\Delta[K]) \leq \text{reg}_{\mathbb{k}}(\Delta)$ dir. Genel olarak, çalışmalarımızda elde ettiğimiz sonuçlar, katsayı cisminin karakteristiğinden bağımsızdır, bu sebepten zaman zaman \mathbb{k} sembolünü notasyonumuzda kullanmayacağız.

Her ne kadar regülarite bir topolojik değişmez olmasada, regülarite hesaplarında topolojik yöntemler önemli bir yer tutmaktadır. Çoğu zaman, verilen simpleksel kompleksin bir köşesini dikkate alarak, iki simpleksel altkompleks üzerinden tümevarıma başvuracağız. Daha detaylı olarak, verilen herhangi bir $x \in V$ köşesine karşılık $\text{sil}_{\Delta}(x) := \{F \in \Delta : x \notin F\}$ ve $\text{bag}_{\Delta}(x) := \{R \in \Delta : x \notin R \text{ ve } R \cup \{x\} \in \Delta\}$ şeklinde tanımlanan, sırasıyla *silme* ve *bağ* şeklinde adlandıracağımız iki simpleksel altkompleksleriyle çalışacağız. Böyle bir ilintilendirme, bize (Δ, x) ikilisiyle ilişkilendirebileceğimiz Mayer-Vietoris tam dizisini kullanma şansı verecektir:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_j(\text{bag}_{\Delta}(x)) \rightarrow \tilde{H}_j(\text{sil}_{\Delta}(x)) \rightarrow \tilde{H}_j(\Delta) \rightarrow \tilde{H}_{j-1}(\text{bag}_{\Delta}(x)) \rightarrow \cdots \rightarrow \tilde{H}_0(\Delta) \rightarrow 0.$$

Böyle bir tam dizinin varlığı, şu ana kadar elde edilen bir çok sonucunda sebebi olan tümevarımsal eşitsizliği vermektedir:

Önerme 1.2. Δ bir simpleksel kompleks ve $x \in V$ bir köşe olmak üzere:

$$\text{reg}(\Delta) \leq \max\{\text{reg}(\text{sil}_{\Delta}(x)), \text{reg}(\text{bag}_{\Delta}(x)) + 1\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aslında Dao, Huneke and Schweig [14] çalışmalarında $\text{reg}(\Delta)$ 'nin daima $\text{reg}(\text{sil}_{\Delta}(x))$ ve

$\text{reg}(\text{bag}_\Delta(x)) + 1$ ikilisinden birine eşit olmak zorunda olduğunu kanıtlamışlardır.

Özel durumda, her hangi bir G çizgesi için $\Delta = \text{Ind}(G)$ olduğunda, bir x köşesine karşılık gelen silme ve bağ altkompleksleri, indirgenmiş altçizgeler yardımıyla elde edilebilir, yani $\text{sil}_{\text{Ind}(G)}(x) = \text{Ind}(G - x)$ ve $\text{bag}_{\text{Ind}(G)}(x) = \text{Ind}(G - N_G[x])$ sağlanır. Dolayısıyla Önerme 1.2 bu durumda aşağıdaki formu alır.

Sonuç 1.3. G bir çizge ve $v \in V$ bir köşe olmak üzere:

$$\text{reg}(G) \leq \max\{\text{reg}(G - v), \text{reg}(G - N_G[v]) + 1\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşkar olarak her hangi bir (hiper)çizgenin regülarite hesabı oldukça zordur. Bu bağlamda, güncel bir çok çalışma bu değişmez için etkin sınırların bulunmasını veya bu sınırların keskin olduğu (hiper)çizge sınıflarının belirlenmesini amaçlamaktadır. Temel olarak bilinen bir kaç alt veya üst sınırdan bazılarını burada ifade edeceğiz.

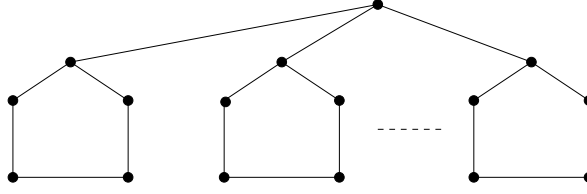
$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere, her hangi bir $M \subseteq E$ altkümesi verilsin. Eğer M deki her hangi iki kenarın ortak bir köşesi mevcut değil ise, M 'ye G 'de bir *eşleme* denir. G 'nin sahip olduğu eşlemeler arasında en fazla elemana sahip eşleminin kardinalitesine G 'nin *eşleme sayısı* denir ve $m(G)$ ile gösterilir. Ayrıca, eğer G de M tarafından eşlenen her hangi iki köşe arasında M ye ait olmayan bir kenar yoksa, M eşlemesine G 'nin *indirgenmiş eşlemesi* denir. Benzer şekilde eleman sayısı en büyük olan indirgenmiş eşleme kümesinin kardinalitesine G 'nin *indirgenmiş eşleme sayısı* denir ve bu sayı $\text{im}(G)$ ile gösterilir.

G bir çizge ve \mathcal{R} bir çizge ailesi olsun. G 'nin \mathcal{R} -örtüm sayısı, her $i \in [r]$ için $R_i \in \mathcal{R}$ ve $\cup_{i=1}^r E(R_i) = E(G)$ olacak şekildeki minimum r sayısı olarak tanımlanır. Özel olarak G 'nin *ardıl-üçgensel-örtüm sayısı* $\text{ardüçört}(G)$ ile gösterilir.

Teorem 1.4. [30, 51] Her G çizgesi için $\text{im}(G) \leq \text{reg}(G) \leq \text{ardüçört}(G)$ eşitsizliği sağlanır.

Burada ifade edilen her iki sınır da keskin olmaktan oldukça uzaktır. Woodrooffe [51] çalışmasında, regülarite ile ardıl-üçgensel-örtüm sayısı arasındaki farkın büyük olduğu çizge örnekleri inşa etmiştir. Diğer taraftan, R_n çizgesini $(n + 1)$ -tane ayrık 5-döngü çizgesinin birleşimine bir tane fazladan köşe ekleyip ve bu köşeyi her bir 5-döngü çizgesindeki bir tek köşe ile kenar yaptırarak elde edilen çizge olarak tanımlarsak (bkz Şekil 1.1), her $n \geq 1$ için $\text{reg}(R_n) = \text{im}(R_n) + n$

eşitliği sağlanır. Yani regülarite ve indirgenmiş eşleme sayısı arasındaki farkta istenildiği kadar açılabilir.



Şekil 1.1: R_n çizgesi.

Burada inşaa ettiğimiz R_n çizgesi başka bir sebepten dolayı da önemlidir. G bir çizge ve x bir köşe olsun. Eğer $S \subseteq V$ kümesi $G - N_G[x]$ çizgesinde bağımsız bir küme iken, $S \cup \{v\}$ birleşimi G de bağımsız bir küme olacak şekilde bir $v \in N_G(x)$ köşesi mevcut ise x köşesine bir *döküm köşesi* diyeceğiz. Buradan eğer

(i) $E(G) = \emptyset$,

(ii) G de bir x döküm köşesi vardır öyleki $G - x$ ve $G - N_G[x]$ çizgelerinin her ikisinde köşe-parçalanabilir.

koşullarından bir tanesi gerçekleşiyor ise G çizgesine *köşe-parçalanabilir* denir.

Dikkat edilecek olursa, R_n çizgesi köşe-parçalanabilir, dolayısıyla, regülarite ve indirgenmiş eşleme sayısı arasındaki fark köşe-parçalanabilir çizgeler için de istenildiği kadar büyük olabilir.

Regülarite çoğunlukla kombinatoriyal değişmeli cebir alanındaki matematikçilerin ilgisini çekmiş olsada, var olan sonuçların bir çoğunu topolojik kombinatoriyal yöntemler ile elde etmekte mümkündür. Topolojik kombinatorik disiplini, Lovasz'ın [32] Kneser savını ispatlamasıyla başlamıştır. Lovasz sadece bir açık savın doğruluğunu kanıtlamakla kalmamış, cebirsel topoloji gibi çizgeler teorisiyle karşılaştırıldığında daha köklü metodolojiye sahip olan bir alanın çizge problemlerindeki etkinliğinde ortaya koymuştur. Temelde Lovasz'ın fikri, çizge probleminin doğasını algılayabilecek bir simpleksel kompleksi çizgeye intilendirip, topolojide var olan bir takım nümerik değişmezler ve bu değişmezler arasındaki eşitsizlikleri kullanmaktan ibarettir diyebiliriz. Örneğin, aradığımız değişken kromatik sayı ise ilintili kompleks çizgenin $\mathcal{N}(G)$ komşuluk kompleksidir ve buradaki sonuç "Eğer $\mathcal{N}(G)$ kompleksi n -bağlantılı ise $\chi(G) \geq n + 3$ dür" şeklinde ifade edilebilir. Çizge renklendirme teorisindeki genelleştirmeler ve bunların uygulamaları dikkate alındığında, bu tip bir sonucun daha genel halini elde etmek ileriki çalışmalarımızın önceliklerinden olacaktır.

Bu bağlamda, G bir çizge ve \mathcal{F} de bir çizge ailesi olsun. Buradan $f: V(G) \rightarrow [k]$ şeklindeki bir fonksiyon her bir $i \in [k]$ için $G[f^{-1}(i)]$ çizgesi \mathcal{F} -serbest olma koşulunu sağlıyor ise, f 'ye G 'nin bir \mathcal{F} -serbest k -renklendirmesi denir. G 'nin \mathcal{F} -serbest kromatik sayısı, G 'nin sahip olduğu en küçük \mathcal{F} -serbest k -renklendirme sayısı olarak tanımlanır ve $\chi_{\mathcal{F}}(G)$ şeklinde gösterilir. Örneğin klasik köşe kromatik sayı için $\chi(G) = \chi_{K_2}(G)$ sağlanır.

Bu yaklaşımın doğal bir etkisi çizge ile ilintili bağımsızlık kompleksinin genelleştirilmesinde de kullanılabilir olmasıdır.

Tanım 1.5 (YC, 2012). $G = (V, E)$ bir çizge ve \mathcal{F} bir çizge ailesi olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{D}(G; \mathcal{F}) := \{S \subseteq V : G[S] \text{ çizgesi } \mathcal{F} - \text{serbestir}\}$$

şeklinde tanımlanan simpleksel komplekse, G 'nin \mathcal{F} ailesiyle parametrize edilmiş *yoksunluk kompleksi* denir.

Örneğin her G çizgesi için $\mathcal{D}(G; K_2) = \text{Ind}(G)$ dir. Bu projenin temel hedeflerinden bir tanesinde $\Lambda(G) := \mathcal{D}(G; \{C_3, C_4, C_5, \dots\})$ yoksunluk kompleksinin (*döngü-kıran kompleksi*) topolojik yapısının bazı özel çizgeler için hesaplanmasıdır.

Uyarı 1.6. Tanım 1.5 de verilen yoksunluk kompleksi doğal olarak yönlü-çizgeler içinde verilebilir. Özel olarak her hangi bir \vec{G} yönlü çizgesi için $\Lambda(\vec{G}) := \mathcal{D}(\vec{G}; \{\vec{C}_3, \vec{C}_4, \vec{C}_5, \dots\})$ kompleksi, \vec{G} 'nin döngüsüzlük (acyclic) kompleksi olarak bilinmektedir [10].

Genel olarak yoksunluk kompleksinin boyutu özel durumlarda çizgeler ile ilintili bir takım nümerik değişmezlerle karşılık gelmektedir. Bu bağlamda:

Tanım 1.7 (YC, 2012). $G = (V, E)$ bir çizge ve \mathcal{F} bir çizge ailesi olsun. Bu takdirde

$$\alpha(G; \mathcal{F}) := \max\{|S| : S \subseteq V \text{ ve } G[S] \text{ çizgesi } \mathcal{F} - \text{serbestir}\},$$

$$\beta(G; \mathcal{F}) := \min\{|R| : R \subseteq V \text{ ve } G[R] \text{ çizgesi } \mathcal{F} - \text{serbestir}\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Örnek 1.8. G herhangi bir çizge olmak üzere:

- $\mathcal{F} = \{K_2\}$ için $\alpha(G; K_2) =$ bağımsızlık sayısı ve $\beta(G; K_2) =$ köşe-örtüm sayısı,

- $\mathcal{F} = \{C_3, C_4, C_5, \dots\}$ için $\alpha(G; \{C_3, C_4, C_5, \dots\}) =$ orman-sayısı ve $\beta(G; \{C_3, C_4, C_5, \dots\}) =$ döngü-kıran sayısı dır.

Önerme 1.9. Her G çizgesi ve \mathcal{F} çizge ailesi için $\text{boy}(\mathcal{D}(G; \mathcal{F})) = \alpha(G; \mathcal{F}) - 1$ sağlanır.

Önerme 1.9 ve $\alpha(G; \mathcal{F}) + \beta(G; \mathcal{F}) = |G|$ eşitliği dikkate alındığında $\mathcal{D}(G; \mathcal{F})$ yoksunluk kompleksinin topolojik yapısının (örneğin bağlantılık sayısı gibi) belirlenmesi $\alpha(G; \mathcal{F})$ ve $\beta(G; \mathcal{F})$ değişmezlerinin belirlenmesi veya etkin bir şekilde sınırlandırılabilmesini sağlamaktadır.

1.1 Bulgular Dökümü

Bu altbölümde genel değerlendirmeye girilmeksizin başlıklar halinde proje çalışması sonucunda ortaya konan yeni sonuçlar verilmiştir. Genel değerlendirme Bulgular bölümünde detaylı olarak sunulacaktır.

- Bütün kare-serbest monomial ideallerin ve dolayısıyla bütün hiperçizgelerin regülariteleri ilintili iki-çoklu çizgelerden hesaplanabileceği ispatlanmıştır.
- Çizge operasyonlarının regülariteye olan etkileri saptanmıştır. Özel olarak Lozin operasyonlarının, kenar bölme ve kenar büzme operasyonlarının çizge regülaritesine olan etkisi net olarak ortaya konmuştur.
- İlk iki sonucun birlikte değerlendirilmesiyle, her hangi bir kare-serbest monomial idealin regülarite hesabı karmaşıklığının iki-çoklu, maksimum derecesi en fazla üç olan ve kuşağı istenildiği kadar büyük olan bir çizgenin regülarite hesabının karmaşıklığına denk olduğu saptanmıştır.
- Köşe-parçalanabilir çizgelerin regülarite hesabı genel anlamda topolojik olarak belirlenmiş, özel durumlarda, örneğin böyle bir çizgenin (C_4, C_5) -serbest olması veya (C_3, C_5) -serbest olması durumlarında indirgenmiş eşleme sayısına eşit olduğu kanıtlanmıştır.
- Ardıl-sökülebilir çizge kavramı tanımlanmış ve bu sınıfın diğer çizge sınıflarıyla ilişkileri belirlenmiştir. Ardıl-sökülebilir çizgelerin regülarite hesapları için tümevarımsal bir sonuç elde edilmiştir. Ayrıca, bilgisayar desteğiyle, küçük köşe sayısına sahip ardıl-sökülebilir çizgelerin sayısı, bu çizgeler için regülarite hesapları ve bu çizgeler arasında regülaritesi

indirgenmiş eşleme sayısına eşit olan veya olmayan çizge sayıları tespit edilmiştir.

- Kuşağı beş ve beşten büyük olan iyi-örtümlü çizgeler için Cohen-Macaulay olmak ve köşe parçalanabilir olmanın bir birlerine denk oldukları kanıtlanmıştır. Ayrıca, özellikle (C_4, C_5, C_7) -serbest iyi-örtümlü çizgelerin ardıl-sökülebilir ve köşe-parçalanabilir oldukları ispatlanmıştır.
- Her hangi bir \mathbb{k} cismi üzerinde "asal çizge" kavramı tanımlanmış ve bir çizgenin regülaritesinin o çizgenin indirgenmiş asal çizgelerine parçalanışlarından hesap edilebileceği ispatlanmıştır. Ayrıca asal çizgelerin bir takım çizge teorik karakterizasyonları verilmiş ve bu bağlamda bazı çizge sınıfları için regülarite hesabı yapılmıştır. Bilgisayar desteğiyle, \mathbb{Z}_2 cismi üzerinde asal olan fakat \mathbb{Z}_3 de asal olmayan bir çizge örneği keşfedilmiştir.
- Gromov hiperbolik geometri ve Lozin operasyonları yardımıyla, verilen her hangi bir (n, k) tamsayı çifti için $(n \geq k \geq 1)$ regülaritesi n ve indirgenmiş eşleme sayısı k olan çizgelerin varlıkları kanıtlanmıştır. Ayrıca, $2K_2$ -serbest çizgelerin regülariteleri için yerel bir üst sınır keşfedilmiştir.
- Çizgelerde ve çizgelerin bağımsızlık kompleksleri üzerinde kenar büzme ve bölme operasyonlarının etkileri incelenmiş ve bu bağlamda her hangi bir G çizgesi için "sanal indirgenmiş eşleme sayısı" $\text{vim}(G)$ kavramı tanımlanmış, kuşağı beş ve beşten büyük olan iyi-örtümlü çizgelerin regülaritelerinin tam olarak bu değişmeze eşit olduğu ispatlanmıştır.
- Her hangi bir simpleksel kompleksin homotopi tipinin belirlenmesinde kullanılabilecek homotopi indirgeme yöntemleri ve eşleme-ağaçları yardımıyla Morse-eşlemelerinin nasıl inşaa edilebileceği belirlenmiş, bu yöntemlerle bazı çizgelerin yoksunluk komplekslerinin homotopi tipleri hesaplanmıştır.
- $P_2 \times P_n$ formundaki mazgal çizgelerin döngü-kıran komplekslerinin homotopi tipleri belirlenmiştir.
- Morse-eşlemeleri yardımıyla kesitlenebilir turnuva yönlü çizgelerinin döngü-kıran komp-



lekslerinin homotopi tipleri ve hücre yapıları belirlenmiş, buradan elde edilen topolojik değişmez yardımıyla bu tip çizgelerin kromatik sayıları için keskin bir üst sınır elde edilmiş ve döngü-kıran sayıları bu değişmez yardımıyla hesaplanmıştır.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde proje kapsamında üzerinde çalışılmış olan her iki problemde tarihsel gelişimi ve son dönemde yapılan çalışmalar detaylı olarak incelenecektir.

2.1 Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regüleritesi

Castelnuovo-Mumford regülarite ilk olarak Castelnuovo'nun 1893 yılında yayınlamış olduğu "pürüzsüz projektif uzay eğilileri üzerindeki lineer sistemler" başlıklı çalışmasıyla ortaya çıkmıştır [12]. Bu çalışmasında Castelnuovo, derecesi r olan bir yüzey tarafından koparılmayan, bir eğri üzerindeki r -katlı düzlem kesitinin tam lineer sisteminin en büyük derecesi r için keskin bir üst sınır elde etmiştir. Bir diğeri, Hermann'ın 1926 yılında Hilbert'in bir problemi için ortaya koyduğu cevapta gizlidir [25]. Hermann bu çalışmasında, sonlu tane homojen polinom tarafından üretilen bir idealin minimal serbest çözümlüğünün sonlu adımda hesaplanabileceğini ve bu hesabın sadece üzerinde çalışılan halkanın değişmez sayısına ve verilen polinomların maksimal derecesine bağlı olduğunu kanıtlamıştır. Her ne kadar Hermann'ın yaklaşımı algoritmik olmasada, fikirleri 80'li yıllarda *Gröbner taban tekniği* olarak bilinen algoritmik cebirsel hesaplama yaklaşımının doğuşuna sebep olmuştur. Bu bağlamda, Castelnuovo-Mumford regülarite bu tip algoritmaların karmaşıklığının tespiti için etkin bir sınır teşkil etmektedir.

Regülaritenin ilk formal tanımı 1966 yılında Mumford tarafından verilmiştir [36]. Ardından 1982 de Oishi [41], bir derecelendirilmiş modulün regülaritesini yerel kohomoloji modülleri kullanılarak tanımlamış ve bugün kullanmakta olduğumuz minimal serbest çözümlük tanımını da 1984 yılında Eisenbud ve Goto [17] formalize etmişlerdir. Aslında Eisenbud ve Goto'nun çalışması, günümüzde hala genel olarak açık olan en önemli savlardan birinide içermektedir. Bu sav, eğer $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ bir polinom halkası ve $P \subset (x_1, \dots, x_n)^2$ bir asal derecelendirilmiş ideal ise

$$\text{reg}(P) \leq \text{deg}(R/P) - \text{koboy}(R/P) + 1$$

eşitsizliğinin sağlanacağını iddia etmektedir. Burada $\text{koboy}(I)$, bir I idealinin kohomoloji boyutunu, yani her $i > q$ için $H_i^i(R) = 0$ olan en küçük q sayısını göstermektedir. Aslında Eisenbud-Goto Savı, regülaritenin değişmeli cebir ve cebirsel geometri alanlarında bu denli ilgi görmesinin önemli sebeplerinden biridir.

Giriş bölümünde ifade ettiğimiz regülarite tanımı, iyi bilinen Hochster formülünün direkt bir

sonucudur. Diğer bir ifade ile, eğer Δ ailesi $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ üzerinde bir simpleksel kompleks ve I_Δ de Δ 'nin Stanley-Reisner ideali ise, Hochster formülü I_Δ idealinin derecelendirilmiş Betti sayılarını Δ 'nin indirgenmiş altkomplekslerinin homolojisi cinsinden ifade edilebileceğini söyler.

Yani,

$$\beta_{i,j}(I_\Delta) = \sum_{|W|=j, W \subseteq V} \dim_{\mathbb{k}} \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta[W]; \mathbb{k})$$

eşitliği sağlanır. Simpleksel kompleksler, her ne kadar kombinatorial objeler olsa da, genel anlamda bu nesnelere belirli kombinatoriyal sınıflara bölünmesi çok kolay değildir. Dolayısı ile, kombinatorial özelliklerin etkinliğinin artması için çoğu zaman daha belirgin kombinatoriyal bir nesle ile ilintilendirilmiş simpleksel komplekslerin çalışılması nesnel durmaktadır. Bunun en belirgin örnekleri çizgeler ile ilintilendirilmiş bağımsızlık kompleksleridir. Bu tip komplekslerin topolojik veya cebirsel yapılarını, çizgenin sağladığı değişik özelliklerinden veya çizge değişmezlerinden elde etmek temel metodoloji haline gelmiştir. Bu yöneylemin en önemli sebebi 80 yıllardan başlayarak günümüzdeki aktif bir matematikçi olan Stanley'in çalışmalarına dayanır [44]. Bu yaklaşım aynı zamanda bu tip nesnelere topolojik veya cebirsel yapılarının belirlenmesi noktasında yeni problemler üretmiş ve son 25 yıllık süreçte, bu işlev amaçlı bir çok yeni teknik ve metodoloji ortaya konmuştur. Bunların büyük bölümü topolojide veya cebirde kendine önemli birer yer edinmiş köklü teorilerin bir nevi kombinatoriyal versiyonlarının devşirilmesinden oluşmaktadır. En önemli örneklerden bir tanesi Forman'ın formalize ettiği "Ayrık Morse teori" dir [22]. Bu yeni kombinatoriyal metodolojilerin en belirgin ortak özelliği algoritmik bir yapıya sahip olmalarıdır ve bu özellik hesaplamalarda bilgisayarların etkinliğini önemli derecede artırmıştır.

Çizgeler açısından regülarite hesabı Zheng'in çalışmasıyla başlamıştır [52]. Bu çalışmada Zheng, orman çizgelerin regülaritesinin indirgenmiş eşleme sayısına eşit olduğunu kanıtlamıştır. Bu bağlamda Há tarafından yayınlanan ve oldukça yeni olan inceleme [24], konunun detaylı taramasını vermektedir.

Regülarite topolojik kombinatorik ve değişmeli cebir dışında ayrık geometride de önemli bir enstrümandır. Bu alanda genellikle rasyonel sayı cisiminde hesaplanır ve *Leray sayısı* $L(\Delta)$ olarak adlandırılır [29]. Buradaki işlevi bir simpleksel kompleksin geometrik gösteriminin varlığına bir engel (obstruction) olarak betimlenebilir. Bu bağlamda, \mathcal{F} ailesi \mathbb{R}^d de kompakt konveks kümelerin bir ailesi olmak üzere, eğer $\Delta \cong \mathcal{N}(\mathcal{F})$ ise, yani Δ simpleksel kompleksi verilen aileinin *nerve* kompleksi ise, Δ ye *d-gösterimlidir* denir. Buradan, eğer bir Δ simpleksel kompleksi *d-*



gösterimli ise $\text{reg}(\Delta) = \mathcal{L}(\Delta) \leq d$ eşitsizliği sağlanır.

2.2 Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi

Çizgelerin döngü-kıran kompleksleri ilk olarak proje yürütücüsü tarafından 2011 yılında tanımlanmış ve çalışılmaya başlanmıştır. Bu kavram daha sonra proje çalışmamız sürecinde geliştirilerek yoksunluk kompleksleri tanımı elde edilmiştir. Bu bağlamda sadece turnuva yönlü çizgelerin döngü-kıran kompleksleri (bkz Uyarı 1.6) 80'li yıllardan itibaren bilinen ve üzerinde çalışılan bir kavramdır [10].



3. GEREÇ VE YÖNTEMLER

Bu bölümde proje kapsamında ortaya konan problemlerin çözümlerinde kullanılan yöntem ve metodolojik teoriler öz bir şekilde ifade edilecektir. Burada ortaya konan yöntemlerin bir kısmı literatürde vardır ve bir kısımda projemiz kapsamında geliştirilmiştir.

3.1 Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regüleritesi

Giriş bölümünde de açıklandığı üzere, verilen her hangi bir I kare-serbest monomial idealin regülerite hesabı oldukça zordur. Dolayısıyla, bu noktadaki temel yaklaşım, idealin ilintili olduğu kombinatoriyal nesnenin özelliklerinden ve sınıflandırılmasından başlamaktadır. Bu tip özelliklerin veya sınıflandırılmanın bilinmesi de çoğu zaman problemin çözümünü kolaylaştırmamaktadır. Her ne kadar regülerite bir cebirsel değişmez olsada, değişmeli cebir metodolojisi bu değişmezin hesaplanmasında güçlü bir etkinliğe sahip değildir. Bunun en önemli sebeplerinden biri, böyle bir idealin derecelendirilmiş Betti sayılarını hesaplamak için asli bir cebirsel yöntemin olmayışıdır. Hesap noktasında en belirgin yaklaşım, bilinen cebirsel tam dizilerdir. Bunun bir örneği Önerme 1.2 de yer alan eşitsizliğin dayanağını oluşturan tam dizidir. Bu diziler aşikar olarak tümevarımsal bir yöntem imkanı sunmaktadır.

Regüleritenin topolojik bir değişmez olmamasına rağmen, hesap noktasında topolojik kombinatorik önemli bir yere sahiptir. Örneğin, homolojik cebirden elde edilebilen ve Önerme 1.2 den önce verilen Mayer-Vietoris dizisi aslında her hangi bir simpleksel Δ kompleksi ve $x \in V(\Delta)$ köşesi için $\Delta \cong C_x(\text{bag}_\Delta(x)) \cup_{\text{bag}_\Delta(x)} \text{sil}_\Delta(x)$ parçalamasının direkt bir sonucudur. Burada $C_x(\text{bag}_\Delta(x))$ ibaresi $\text{bag}_\Delta(x)$ bağ kompleksinin x köşesi ile koni edilmesini göstermektedir. Topolojik açıdan eğer $\text{bag}_\Delta(x)$ bağ kompleksi $\text{sil}_\Delta(x)$ kompleksinde büzülebilir ise, bu parçalanma

$$\Delta \simeq \Sigma(\text{bag}_\Delta(x)) \vee \text{sil}_\Delta(x) \quad (3.1)$$

homotopi denkliği verirken bu denklik ve onun çizge teoritik eşi proje kapsamında ortaya konan her iki problemin çözümü noktasında önemli bir katkıya sahiptir.

Bilinen veya bu proje kapsamında elde edilen regülerite hesaplarının büyük bir çoğunluğu çizgelerin kombinatoriğinden yola çıkılarak elde edilmiş sonuçlardır. Bu projenin en önemli çıktılarından bir tanesi, çizge regüleritesinin aslında *asal çizge* olarak adlandırdığımız bir takım özel çizgelere indirgenmiş parçalanması olarak ifade edebiliriz. Bu bağlamda, temel problem bu asal



çizgelerin belirlenmesi ve verilen her hangi bir çizgenin asallara indirgenmiş parçalanmasının elde edilmesidir. İkinci noktada, yani indirgenmiş çizge parçalamaları önemli bir geçmişe ve zengin literatüre sahiptir.

3.1.1 Bilgisayar Destekli Hesaplamalar

Proje kapsamında sağlanan destek ile, özellikle regülarite hesaplarımızla ilgili, önsavların testlerinde veya bir takım enümeratif hesaplamalarda, bilgisayar temel araç olarak kullanılmıştır.

Bu bağlamda, proje öneri formunda da belirtildiği üzere hesaplamaların bir kısmında Macaulay 2 programı kullanılmıştır. Genellikle teorik yaklaşımların yetersiz olduğu veya eldeki öngörü keskinleştirme noktasında, sabit çizgelerin regülarite hesapları için bu program kullanılmıştır. Fakat, genel hesaplarda Brendan McKay ve Gordon Royle çizge tabanını Macaulay 2 ye aktarımı noktası problemlidir için, Sage de regülarite, enümeratif saymalar ve çizge değişmezlerinin hesapları için yeni kodlar yazdık ve bu hesapları belirli köşe sayısına sahip çizge sınıfları için gerçekleştirdik. Bu doğrultuda elde edilen hesaplamalara da Bulgular bölümünde yeri geldikçe detaylı bir şekilde yer verilmiştir. Proje öneri aşamasında regülarite hesabının karmaşıklığı bilinmemekteydi. Geçen süreçte yapılan çalışmalar ve bizim elde ettiğimiz sonuçlar altında, bu karmaşıklığın NP-tam olduğu artık bilinmektedir. Dolayısıyla, özellikle belirli regülarite özelliklerine sahip çizgelerin keşfi noktasında, rastsal çizgeler üzerinden hesap yapmak oldukça uzun zaman gerektiren bir işlemdir. Örneğin, $2K_2$ -serbest çizgeler içinde regülaritesi 4 olan en küçük köşe sayısına sahip çizgenin köşe sayısı 120 dir ve bu tip çizgelerin regülaritesi için elde edilen en iyi üst sınır köşe sayısı cinsinden $\log(n)$ dir.

Hardware Overview

Model Name: Dell Precision

Processor Name: 6-core Intel Xeon

Processor Speed: 2.66 GHz

Number of Processor: 2

Total Number of Cores: 12

L2 Cache (per core): 256 KB

L3 Cache (per processor): 8 MB

Memory: 48 GB

Processor Interconnect Speed: 6.4 GT/s

3.2 Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi

Döngü-kıran komplekslerinin veya daha genel olarak çizgelerin yoksunluk komplekslerinin topolojik yapısının keşfi noktasında, temel enstrümanımız "Ayrık Morse Teori" olmuştur. Bu bağlamda, proje bursiyeri ve doktora öğrencisi olan Demet Taylan, her hangi bir simpleksel kompleksin homotopi tipi hesabında kullanılabilir, indirgeme yöntemleri ve eşleme-ağaçları yardımıyla Morse-eşlemelerinin nasıl inşa edilebileceğini ortaya koymuştur [45]. Bu gelişme, hem topolojik kombinatorik disiplinine kuramsal bir katkı sunmuş ve aynı zamanda genel hesapların (turnuva yönlü çizgeleri de dahil olmak üzere) yapılabilmesine olanak sağlamıştır.

Uyarı 3.2. Proje önerisi kapsamında döngü-kıran komplekslerin homotopi tipi hesabı için herhangi bir bilgisayar desteği planlanmamıştır.

4. BULGULAR

Bu bölümde proje kapsamında ulaştığımız sonuçların genel değerlendirilmesi yapılacaktır. Bu bağlamda proje önerisinde ortaya konan problemler ve ayrıca süreçte daha önce planlanmayan gelişmeler ve sonuçları da detaylı olarak incelenecektir. Sonuçların rahatlıkla irdelenebilmesi amacıyla, gelişmeler bir dizi altbaşlık altında değerlendirilmiştir.

4.1 Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regüleritesi

Regülerite hesabı noktasında proje başlangıcında temel hedefimiz köşe-parçalanabilir, ardıl-sökülebilir ve bir takım döngü-yoksun çizgelerin regülerite hesaplarının yapılması, ayrıca regüleritenin bazı çizge operasyonları altında sergilediği davranışların tespitinin belirlenmesi olarak ifade etmiştik. Bu doğrultuda elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

4.1.1 Kare-serbest ideallerin regüleritesi

Giriş bölümünde açıklandığı üzere, verilen her hangi bir I kare-serbest monomial ideal, eğer bir çizgenin kenar ideali değilse, diğer bir deyişle I ile ilintili Stanley-Reisner kompleks bir bağımsızlık kompleks değil ise, I 'nin regülerite hesabı çizgelerin sunduğu kombinatoriyal zenginlikten yoksundur. Bu bağlamda ilk olarak böyle bir idealin regüleritesinin aslında iki-çoklu bir çizgenin regüleritesinden hesaplanabileceğini ispatladık. Buradaki yaklaşımımız (1.1) eşitliğinden yola çıkarak, her hangi bir hiperçizgenin regüleritesinin iki-çoklu bir çizgenin regüleritesinden hesaplanabileceğini göstermek olarak ifade edilebilir.

Tanım 4.1. $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ bir hiperçizge olsun. Bu takdirde, her hangi bir $S \subseteq V$ altkümesi için $S \cup \mathcal{E}$ kümesi üzerinde " $(x, F) \in E(B_S(\mathcal{H}))$ ancak ve ancak $x \notin F$ " şeklinde tanımlanan çizgeyi $B_S(\mathcal{H})$ ile gösterelim. Özel olarak $S = V$ olduğunda $B_V(\mathcal{H})$ yerine sadece $B(\mathcal{H})$ yazılacaktır.

Lemma 4.2 (BC, 2014 [8]). Her hangi bir $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hiperçizge ve her $S \subseteq V$ altkümesi için $\text{Ind}(B_S(\mathcal{H})) \simeq \text{Ind}(B(\mathcal{H}\{S\}))$ sağlanır.

Bu Önerme 4.2'nin direkt bir sonucu olarak $\text{Ind}(B_S(\mathcal{H})) \simeq \Sigma(\Delta(\mathcal{H}))[S]$ homotopi denkleğinin sağlandığıda rahatlıkla görülebilir. Bu bağlamdaki temel sonucumuz:

Teorem 4.3 (BC, 2014 [8]). Her hangi bir $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hiperçizgesi için $\text{reg}(B(\mathcal{H})) = \text{reg}(\Delta(\mathcal{H})) + 1$ dir.

Diğer bir ifadeyle, eğer I kare-serbest bir monomial ideal ise

$$\text{reg}(\mathfrak{B}(I)) = \text{reg}(I) \quad (4.4)$$

olacak şekilde bir iki-çoklu $\mathfrak{B}(I)$ çizgesi mevcuttur. Burada $\mathfrak{B}(I) := B(\mathcal{H}(I))$ çizgesidir.

Uyarı 4.5. Bu sonuç bütün kare-serbest monomial idealler ve dolayısıyla bütün hiperçizgeler için regülarite hesabını iki-çoklu çizgelerin regülarite hesabına indirgemıştır.

4.1.2 Çizge operasyonları ve regülarite

Proje başlangıç noktasında, genel çizge operasyonlarının regülariteye etkisi bilinmemektedir. Bu bağlamda, geldiğimiz noktada Lozin operasyonu, kenar bölme ve büzme gibi temel operasyonların etkileri proje çalışmaları kapsamında net olarak belirlenmiştir.

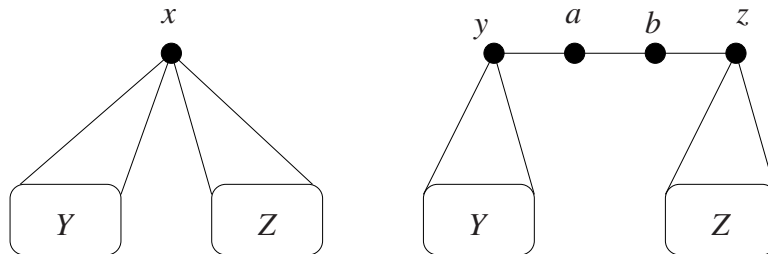
$G = (V, E)$ bir çizge ve $x \in V$ bir köşe olsun. G 'nin x köşesine karşılık *Lozin dönüşümü* $\mathcal{L}_x(G)$ şu şekilde tarif edilebilir:

(i) $N_G(x)$ kümesinin keyfi bir $N_G(x) = Y \cup Z$ parçalanışını alalım;

(ii) G den x köşesini ve ilintili kenarları silelim;

(iii) geriye kalan çizgeye $P_4 = (\{y, a, b, z\}, \{ya, ab, bz\})$ şeklinde 4 köşeli bir yol ekleyelim;

(iv) burada y köşesini Y kümesindeki ve z köşesini de Z kümesindeki her köşe ile kenar yaptıracağız.



Şekil 4.1: Lozin dönüşümü.

Teorem 4.6 (BC, 2014 [6]). Her $G = (V, E)$ çizgesi ve $x \in V$ köşesi için $\text{reg}(\mathcal{L}_x(G)) = \text{reg}(G) + 1$ dir.

Her hangi bir çizge ardışık Lozin operasyonlarıyla iki-çoklu, maksimum derecesi en fazla üç ve kuşak sayısı da istenildiği kadar büyük olan bir çizgeye dönüştürülebilir. Dolayısıyla Teorem 4.6 ve (4.4) eşitliği birleştirildiğinde, her hangi bir kare-serbest monomial idealin ve dolayısıyla bütün hiperçizgelerin regülarite hesabındaki karmaşıklığın bu tip iki-çoklu çizgelerin regülarite hesabı karmaşıklığına denk olduğu görülür.

Lozin operasyonunun özel bir hali $N_G(x)$ kümesinin parçalanışındaki kümelerden birinin tek elemanlı seçilmesiyle elde edilebilir. Bu durumda, eğer örneğin $Y = \{u\}$ alırsak, karşılık gelen Lozin operasyonu tam olarak $e = xu$ kenarının üç-parça bölümüne denk gelir. Diğer bir ifadeyle, bir $G = (V, E)$ çizgesinde her hangi bir $e = xu$ kenarını ($\{x = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = u\}, \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}$) formundaki bir yol ile değiştirme operasyonu bir Lozin dönüşümüdür ve $\mathcal{L}(G; e)$ ile gösterilir. Dolayısıyla, Teorem 4.6'in bir sonucu olarak $\text{reg}(\mathcal{L}(G; e)) = \text{reg}(G) + 1$ eşitliği sağlanır. Genel olarak kenar bölme operasyonları 4.1.7 altbölümünde incelenecektir.

4.1.3 Köşe-parçalanabilir çizgeler

Köşe-parçalanabilir çizgeler tümevarımsal tanımıyla doğal çizge sınıflandırmaların dışında oldukça ilginç bir aile belirler. Bu özellik genel olarak kalıtsal olmadığı için, bu tip çizgelerin çizge teorik karakterizasyonu pek mümkün gözükmemektedir. Bu bilgi altında, bu sınıfa yaklaşımımız fazladan kısıtlamalar koyarak, bu tip çizgelerin temel özelliklerini keşfetmekten geçmektedir.

Öncelikle her hangi bir köşe-parçalanabilir çizgenin regülarite hesabının topolojik olarak hesaplanabileceğini ispatladık. Bu aşamada, böyle bir çizgenin bağımsızlık kompleksinin daima bir takım kürelerin noktasal birleşimine (wedge of spheres) homotopik olması bilgisi önemli bir rol oynamıştır.

Tanım 4.7. $G = (V, E)$ her hangi bir köşe-parçalanabilir çizge olsun. Bu takdirde, $\text{Ind}(G)$ kompleksinin homotopi denk olduğu kürelerin noktasal birleşiminde yer alan en büyük boyutlu kürenin boyutuna G 'nin *derinliği* diyeceğiz ve $\text{der}(G)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.8 (BC, 2014). $G = (V, E)$ bir köşe-parçalanabilir çizge ise $\text{reg}(G) = \text{der}(G) + 1$ dir.

Teorem 4.8'in ispatı için x köşesi G 'nin ilk döküm köşesi ise Sonuç 1.3 de verilen eşitsizlik eşitliğe, yani $\text{reg}(G) = \max\{\text{reg}(G - x), \text{reg}(G - N_G[x] + 1)\}$ eşitliğine dönüşmesi ve benzer şe-

kilde G 'nin derinliğinde (3.1) homotopi denkliği kullanılarak $\text{der}(G) = \max\{\text{der}(G-x), \text{der}(G-N_G[x] + 1)\}$ eşitliğinden görmek mümkündür.

Özel durumlarda, bu sınıftaki çizgeler için regülarite hesabı daha kombinatoriyal yoldan hesaplamak mümkündür.

Teorem 4.9 (BC, 2014 [5]). Eğer G çizgesi (C_4, C_5) -serbest köşe-parçalanabilir çizge ise $\text{reg}(G) = \text{im}(G)$ dir.

Benzer bir durum (C_3, C_5) -serbest köşe-parçalanabilir çizgeler içinde ispatlanmıştır. Her iki durumda da, bu tip çizgelerin özel olarak ardıl-sökülebilir olması önemli bir rol oynamaktadır (bknz Altbölüm 4.1.4). Özel olarak üçgensel çizgeler Teorem 4.9'in kapsamında olduğu için:

Önerme 4.10 (BC, 2014 [5, 23, 51]). Eğer G üçgensel bir çizge ise $\text{im}(G) = \text{reg}(G) = \text{ardüçört}(G)$ dir.

Köşe-parçalanabilir çizge kavramında döküm-köşesi önemli bir yere sahiptir. Bu doğrultuda her hangi bir köşenin döküm-köşesi olup-olmadığına karar verme karmaşıklığını belirlemiş durumdayız.

Teorem 4.11 (BC, 2014). Her hangi bir G çizgesi ve bir x köşesi için x köşesinin bir döküm-köşesi olmasına karar verme işlemi bir ardıl-NP-tam (co-NP-complete) problemdir.

4.1.4 Ardıl-sökülebilir çizgeler

Daha öncede bahsedildiği üzere bir çizgenin köşe-parçalanabilir olması kalıtsal bir özellik olmaması sebebiyle bu tip çizgelerin kombinatoriyal sınıflandırılması kolay değildir. Bu bağlamda, özel olarak belirli sonlu sayıda çizge yasaklamaları yardımıyla, köşe-parçalanabilir çizgelerin yapısal özellikleri ortaya konmuştur. Bu işlev yeni bir çizge sınıfında ortaya konmasına vesile olmuştur.

Tanım 4.12. $G = (V, E)$ bir çizge ve $x \in V$ bir köşe olsun. Eğer $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olacak şekilde bir $y \in V \setminus \{x\}$ köşesi varsa, x köşesine *ardıl-hükümlü* (benzer şekilde y köşesine de *hükümlü*) köşe denir. Buradan eğer $E = \emptyset$ veya G de ardıl-hükümlü bir x köşesi var ve $G-x$ ardıl-sökülebilir ise G çizgesine *ardıl-sökülebilir çizge* denir.

Teorem 4.13 (BC, 2014 [5]). Eğer $G = (V, E)$ çizgesi (C_4, C_5) -serbest (veya (C_3, C_5) -serbest) köşe-parçalanabilir çizge ise G ardıl-sökülebilirdir.

Buradan üçgensel çizgeler Teorem 4.13'in hipotezini gerçeklediğinden bu tip çizgeler doğal olarak ardıl-sökülebilirdir.

Önerme 4.14 (BC, 2014 [5]). Köşe-parçalanabilir her iki-çoklu çizge ardıl-sökülebilirdir.

Ardıl-sökülebilir çizgelerin regülarite hesapları noktasında temel yaklaşımımız ardıl-hükümlü köşelerin regülariteye etkilerini tespit etmekle başlamıştır.

Önerme 4.15 (BC, 2014). Eğer x köşesi G de ardıl-hükümlü ise $\text{reg}(G) = \max\{\text{reg}(G - x), \text{reg}(G - N_G[x]) + 1\}$ dir.

Diğer bir ifadeyle, Sonuç 1.3 deki eşitsizlik böyle bir köşe için eşitliğe dönüşür. Buradan,

Teorem 4.16 (BC, 2014). Eğer $G = (V, E)$ çizgesi ardıl-sökülebilir bir çizge ve $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ kümesi G nin bir ardıl-sökme sıralaması ise,

$$\text{reg}(G) = \text{reg}(G_i - N_{G_i}[x_i]) + 1$$

olacak şekilde bir $i \in [n]$ vardır. Burada $G = G_0$ ve $G_i := G_{i-1} - x_i$ dir.

Proje kapsamında sağlanan bilgisayar desteğiyle, ardıl-sökülebilir çizgeler üzerinde bir dizi hesaplamalar gerçekleştirdik. İlk olarak n köşeli çizgelerin (izomorfik sınıflanama altında) ardıl-sökülebilir olanlarının sayısı $n \leq 10$ için aşağıdaki Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1: Ardıl-sökülebilir çizgeler

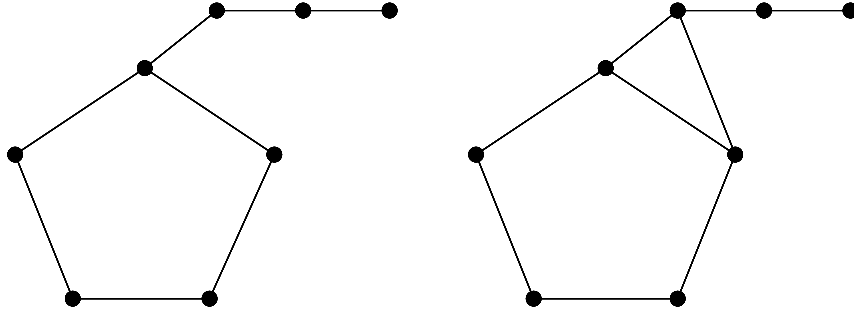
Köşe-sayısı	n köşeli çizge sayısı	n -köşeli ardıl-sökülebilir çizge sayısı
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4	11	10
5	34	29
6	156	123
7	1044	761
8	12346	8098
9	274668	157482
10	12005168	5689061

Benzer bir hesaplamada ardıl-sökülebilir çizgelerin indirgenmiş eşleme sayıları belirlenmiş ve bu çizgeler arasında $reg = im$ eşitliğinin sağlandığı çizge sayıları tespit edilmiştir. Tablo 4.2 den görüleceği üzere regülaritesi indirgenmiş eşleme sayısına eşit olmayan ilk örnek köşe sayısı 8 olduğunda (bknz Şekil 4.2) ortaya çıkmaktadır ve bu fark köşe sayısının büyümesiyle artmaktadır.

Tablo 4.2: $reg = im$ olan ardıl-sökülebilir çizgeler

köşe sayısı	n -köşeli ardıl-sökülebilir çizgelerin im -sayısı						n -köşeli ardıl-sökülebilir çizgeler arasında $reg = im$ olanların sayısı
	0	1	2	3	4	5	
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	2
3	1	3	0	0	0	0	4
4	1	8	1	0	0	0	10
5	1	22	6	0	0	0	29
6	1	73	48	1	0	0	123
7	1	292	458	10	0	0	761
8	1	1501	6392	203	1	0	8096
9	1	9937	139867	7662	15	0	157294

CPU time: continue...



Şekil 4.2: 8 köşeli ve $reg > im$ olan iki ardıl-sökülebilir çizge

Uyarı 4.17. Tablolarda verilen hesaplamalar, SAGE (<http://www.sagemath.org/>) açık matematiksel yazılım sisteminde kendi oluşturduğumuz kodlar sayesinde gerçekleştirilmiştir. Bu ve benzeri hesaplamalarımız devam etmektedir.

Bir G çizgesinin maksimal bağımsız kümelerinin kardinalitesi eşit ise, böyle bir çizgeye *iyi-örtümlü çizge* denir. Her hangi bir çizgenin iyi-örtümlü olup-olmadığına karar vermek veya bu sınıftaki çizgelerin karakterizasyonunu belirlemek oldukça zordur [20]. Bu doğrultuda ardıl-sökülebilir çizge kavramı bu problem için önemli bir etkinliğe sahiptir.

Teorem 4.18 (BC, 2014 [5]). Eğer $G = (V, E)$ çizgesi (C_4, C_5, C_7) -serbest iyi-örtümlü bir çizge ise G ardıl-sökülebilirdir. Özellikle böyle bir çizge köşe-parçalanabilirdir.

Buradaki kilit özellik iyi-örtümlü bir çizgeden ardıl-hükümlü bir köşenin atılması iyi-örtümlü olmayı korumasıdır.

Teorem 4.19 (BC, 2014 [5]). Eğer $G = (V, E)$ çizgesi kuşağı beş veya beşten büyük iyi-örtümlü bir çizge ise, G nin Cohen-Macaulay olması ve köşe-parçalanabilir olması bir birine denktir.

4.1.5 Asal çizgeler

Günümüzde regülarite hesabı çoğunlukla $\text{reg}(G) = \text{im}(G)$ eşitliğini sağlayan çizge sınıflarının belirlenebilmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Bu eşitliğin sağlandığı bir G çizgesi için, eğer $\text{im}(G) = n$ ise $\text{reg}(G) = \text{reg}(nK_2)$ olması anlamına gelir. Burada nK_2 çizgesi regülaritesi n olan ve bu özellikte en az köşeye sahip olan çizgedir. Bu algılama kromatik çizgeler teorisinde önemli bir yere sahip olan "kritik çizge" kavramıyla eşlendiğinde regülarite açısından da böyle bir kavramın önemli olabileceği önsezisini vermektedir.

Tanım 4.20 (BC, 2014). $G = (V, E)$ bir çizge ve \mathbb{k} bir cisim olsun. Eğer her $x \in V$ köşesi için $\text{reg}_{\mathbb{k}}(G) = k$ ve $\text{reg}_{\mathbb{k}}(G - x) = \text{reg}_{\mathbb{k}}(G - N_G[x]) = k - 1$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ varsa, G çizgesine \mathbb{k} cismi üzerinde bir *asal çizge* denir. Eğer G çizgesinin asal olması katsayı cisminin karakteristiğinden bağımsız ise G ye *mükemmel asal çizge* denir.

Örneğin K_2 çizgesi, her $n \geq 4$ için \overline{C}_n çizgesi ve her $k \geq 1$ için C_{3k+2} döngü çizgesi birer mükemmel asal çizge dirler.

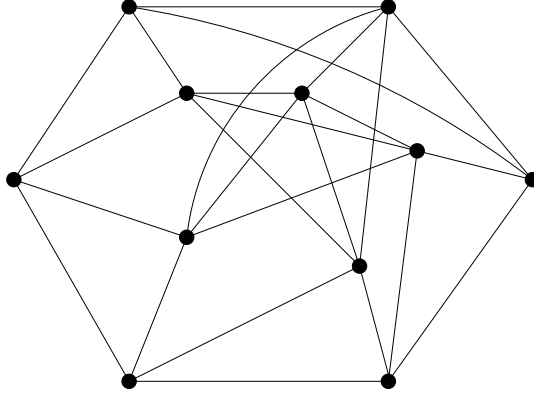
Tanım gereği bir çizgenin asal olup-olmaması kendisi kadar üzerinde çalışılan cismin karakteristiğine de bağımlıdır.

Örnek 4.21. Şekil 4.3 de verilen çizge \mathbb{Z}_2 üzerinde asal çizge dir, fakat \mathbb{Z}_3 göre değildir. Bu örnek proje kapsamında sağlanan bilgisayar desteği sayesinde belirlenebilmiştir.

Sonuç 4.22. Her G çizgesi $\text{reg}(G) = \text{reg}(F)$ olacak şekilde bir indirgenmiş asal F altçizgesine sahiptir.

Tanım 4.23. $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$ çizge ailesi G çizgesinin ikişer ikişer köşe ayrık indirgenmiş altçizgelerinden oluşsun. Eğer $E(H_i) \neq \emptyset$ ve $G[\cup_{i=1}^r V(H_i)] \cong \cup_{i=1}^r H_i$ ise ve ayrıca \mathcal{H} ailesi bu özelliklerle maksimal ise \mathcal{H} ailesine G nin bir *indirgenmiş ayrışımı* denir.

Tanım 4.24. $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$ ailesi G çizgesinin bir indirgenmiş ayrışımı olsun. Eğer her bir H_i altçizgesi asal çizge ise \mathcal{H} ailesine G nin bir *asal ayrışımı* denir ve G nin asal ayrışımalarının



Şekil 4.3: Asal çizge.

kümesi $\mathcal{PD}(G)$ ile gösterilir. Ayrıca, eğer her $i, j \in [r]$ için $H_i \cong H_j \cong H$ sağlanıyor ise $\mathcal{H} = \{rH\}$ şeklinde yazılır.

Sonuç 4.25. Her G çizgesi için $\mathcal{PD}(G) \neq \emptyset$ dir.

Proje kapsamında ulaşılan en önemli sonuçlardan bir tanesi her hangi bir çizgenin regülaritesinin aslında o çizgenin sahip olduğu asal ayrışimlardan hesaplanabileceğinin ispatıdır.

Teorem 4.26 (BC, 2014). G her hangi bir çizge ise

$$\text{reg}(G) = \max \left\{ \sum_{i=1}^r \text{reg}(H_i) : \{H_1, \dots, H_r\} \in \mathcal{PD}(G) \right\}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 4.27. Teorem 4.26 deki eşitliği sağlayan bir asal \mathcal{H} ayrışımına G nin bir *asal parçalanışı* denir ve G nin asal parçalanışlarının kümesi $\mathcal{PF}(G)$ ile gösterilir.

Sonuç 4.28. Bağlantılı bir G çizgesi asaldır ancak ve ancak $\mathcal{PF}(G) = \{G\}$.

Uyarı 4.29. Eğer $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_k\}$ bir indirgenmiş ayrışım ise $k \leq \text{im}(G)$ sağlanır. Fakat $\sum_{i=1}^k \text{im}(H_i) < \text{im}(G)$ olabilir.

Önerme 4.30 (BC, 2014). Eğer $N_G(y) \subseteq N_G(x)$ ise $\text{reg}(G) = \text{reg}(G - x)$ dir. Dolayısıyla böyle bir köşe çiftine sahip olan bir çizge asal olamaz. Benzer şekilde eğer $N_G[u] \subseteq N_G[v]$ ise G bir asal çizge olamaz.

Bu Önerme 4.30 nin basit fakat önemli sonuçlarından bir tanesi:

Sonuç 4.31 (BC, 2014). Eğer G uzaklık-kalıtısal bir çizge ise $\text{reg}(G) = \text{im}(G)$ dir.

Buradaki ispat bu tip çizgelerin her hangi bir bağlantılı asal altçizgesinin K_2 ye izomorfik olması gerektiği kanıtına dayanmaktadır.

Teorem 4.26 in sonucu ve Lozin operasyonlarının etkisi eşlendiğinde, gerçekte asıl sorunun iki-çoklu, maksimum derecesi en fazla üç olan ve kuşağında istenildiği kadar büyük olan çizgelerin asal olanlarının keşfine dayandığı aşıkardır. Bu doğrultuda bu tip çizgelerin bağlantılılık sayıları altan sınırlıdır.

Teorem 4.32 (BC, 2014). Eğer G çizgesi $|G| \geq 3$ ve $\Delta(G) \leq 3$ olmak üzere iki-çoklu asal bir çizge ise G çizgesi 2-bağlantılıdır.

4.1.6 $2K_2$ -serbest çizgelerin regülaritesi

Her ne kadar regülarite ve indirgenmiş eşleme sayısının arasındaki boşluğun istenildiği kadar büyük olduğunu göstermiş olsakta, buradan bu iki değişmez keyfi iki pozitif tamsayı değerlerini alabileceğini iddia etmek mümkün değildir. Diğer taraftan, özellikle $\text{im}(G) = 1$ olan, yani $2K_2$ -serbest olan çizgeler arasında regülaritesi en büyük olarak bilenen çizge Coxeter'in 600-hücrelisi olarak adlandırılan çizgedir ve bu çizgenin regülaritesi 4 dür. Bu tip örneklerin hemen hemen tamamı topolojik olarak kürelere homeomorftir. Bu bağlamda, özellikle geometrik topolojiden boyutu 4 ve 4 den büyük olan (homoloji) kürelerin $2K_2$ -serbest çizgelerin bağımsızlık kompleksleri tarafından üçgenselleştirilemeyeceği (non-triangulable) [43] bilgisi eklendiğinde, yüksek regülariteye sahip $2K_2$ -serbest çizgelerin varlığı önemli bir soru haline gelmiştir. İlginç olarak cevap yine geometride saklıdır. Bir diğer ifade ile regülaritesi istenildiği kadar büyük olan $2K_2$ -serbest çizgelerin varlığını Januszkiewicz ve Swiatkowski'in Gromov geometrideki bir sonucundan elde edebiliriz.

Teorem 4.33. [27] Her n doğal sayısı için $2K_2$ -serbest bir G_n çizgesi vardır öyleki $\text{Ind}(G_n)$, boyutu $(n - 1)$ olan yönlendirilmiş bir yarı-katmanlıdır (pseudomanifold).

Uyarı 4.34. Aslında Januszkiewicz ve Swiatkowski ikilisi tam olarak Teorem 4.33'in iddiasını değil, bu iddianın Gromov geometrideki eşleniğini ispatlamışlardır. Biz terminoloji karmaşıklığı oluşturmamak adına, onların iddialarını bu formda ifade etmeyi uygun bulduk. Ayrıca Januszkiewicz ve Swiatkowski'nın ispatı bir varlık ispatıdır. Bir diğer ifade ile G_n çizgesinin inşasını tarif etmemektedir. Bu ispat dikkatlice incelendiğinde, bu çizgelerin mükemmel asal çizge oldukları gözlemlenebilir.

Regüleritesi istenildiği kadar büyük olan $2K_2$ -serbest çizgelerin varlığı ve Lozin operasyonlarının regüleriteye etkisi birleştiğinde, bu bölümün ana sonucu elde edilir.

Teorem 4.35 (BC, 2014 [6]). Her (n, k) tamsayı çifti $(n \geq k \geq 1)$ için $\text{reg}(G(n, k)) = n$ ve $\text{im}(G(n, k)) = k$ olacak şekilde bir $G(n, k)$ çizgesi vardır.

Burada Teorem 4.35 de varlıkları ortaya konan çizgeler tekil değildir. Buradan hareketle bir sonraki adımımız bu tip çizgelerin yerel özelliklerinin keşfini amaçlamaktadır.

Tanım 4.36. $G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere, $\Gamma(G) := \max\{|N_G[x] \setminus N_G[y]| : x, y \in V \text{ ve } xy \in E\}$ sayısına G nin *maksimum mahremiyet derecesi* denir.

Teorem 4.37 (BC, 2014 [6]). Eğer G çizgesi $2K_2$ -serbest ise $\text{reg}(G) \leq \frac{1}{2}\Gamma(G) + 2$.

Bu üst sınır bilinen küçük örneklerde keskindir. Böyle bir yaklaşımdan hareketle, bu sınıftaki çizgelerin regüleriteye etkisi olan kısmının aslında minimum ve maksimum köşe derecelerinin bir birinden çok uzakta olamayacağı da gözlemlenebilir.

Önerme 4.38 (BC, 2014 [6]). G çizgesi $2K_2$ -serbest olsun. Eğer x köşesi için $d_G(x) < 2\text{reg}(G) - 3$ sağlanırsa $\text{reg}(G) = \text{reg}(G - N_G[x])$ dir.

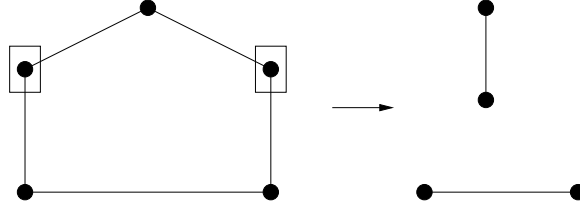
Sonuç 4.39 (BC, 2014 [6]). Eğer G çizgesi $2K_2$ -serbest ve $\text{reg}(G) = k$ ise G 'nin $\text{reg}(G) = \text{reg}(H)$ ve $\delta(H) \geq 2k - 3$ olacak şekilde bir indirgenmiş H altçizgesi vardır.

4.1.7 Büzme, genişleme ve regülerite

Bu bölümde hem çizgeler üzerinde hemde çizgelerin bağımsızlık kompleksleri üzerinde kenar büzme, köşe genişleme ve kenar bölme operasyonlarının regüleriteye olan etkileri incelenmiştir. Simpleksel kompleksler üzerinde kenar büzme operasyonu ilk kez formal olarak Hoppe [26] tarafından tanımlanmış ve özellikle bu tür bir operasyonun ne zaman kompleksin homotopi tipini etkilemeyeceği belirlenmiştir. Bu operasyonlar günümüzde örneğin veri analizinde önemli uygulamalara sahiptir [2]. Benzer bir yaklaşım çizge teorisinde de, özellikle "minor teoride" önemli bir yer tutmaktadır.

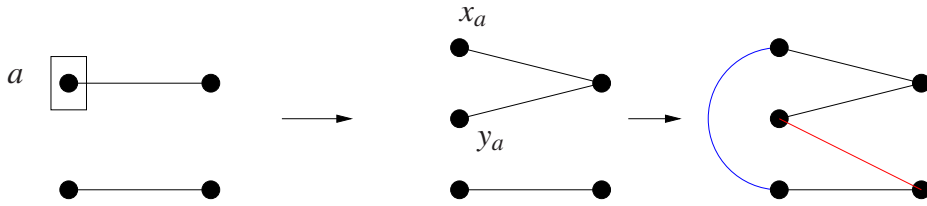
Tanım 4.40. $G = (V, E)$ bir çizge ve $xy \notin E$ olmak üzere eğer $G[\{x, y, u, v\}] \cong 2K_2$ olacak şekilde $u, v \in V \setminus \{x, y\}$ köşeleri mevcut değilse, $\{x, y\}$ köşe ikilisine bir *gerçek-çift* (veya *g-çifti*) denir.

Tanım 4.41. $\{x, y\}$ köşe ikili G çizgesinin bir g -çifti olsun. Buradan $V(g(G; xy)) := (V \setminus \{x, y\}) \cup \{w\}$ ve $E(g(G; xy)) := E(G - \{x, y\}) \cup \{uw : u \in N_G(x) \cap N_G(y)\}$ şeklinde tanımlanan çizgeye G 'nin g -büzülmesi denir ve $g(G; xy)$ ile gösterilir.



Şekil 4.4: g -büzme.

Tanım 4.42. z bir köşe ve $G - N_G[z]$ çizgesinde bir $[A_z, B_z]$ tam-çiftini dikkate alalım. Buradan $V(g(G; z, A_z, B_z)) := (V \setminus \{z\}) \cup \{x_z, y_z\}$ ve $E(g(G; z, A_z, B_z)) := E(G - z) \cup \{ux_z, uy_z : u \in N_G(z)\} \cup \{ax_z : a \in A_z\} \cup \{by_z : b \in B_z\}$ şeklinde tanımlanan çizgeye G 'nin g -genleşmesi denir ve $g(G; z, A_z, B_z)$ (veya sadece $g(G; z)$) şeklinde gösterilir.



Şekil 4.5: g -genleşme.

Bir g -büzme operasyonunun regülariteye etkisi şu şekilde ifade edilebilir.

Önerme 4.43 (BC, 2014 [7]). Eğer $\{x, y\}$ bir g -çift ise

$$\text{reg}(G) \geq \text{reg}(g(G; xy)) \geq \text{reg}(G) - 1$$

sağlanır.

Buradaki temel hedef büzme ve genleşme operasyonlarının ne zaman regülariteyi etkilemeyeceğini belirlemektir.

Tanım 4.44. $\{x, y\}$ çifti G de bir g -çift olsun. Eğer $N_G(u) \subseteq N_G[x] \cup N_G[y]$ olacak şekilde bir $u \in N_G(x) \cap N_G(y)$ köşesi varsa $\{x, y\}$ çiftine bir *doğru-çift* (t -çift) denir. Bir t -çiftine karşılık yapılan g -büzme operasyonuna *doğru-büzme* (veya t -büzme) denir ve $t(G; xy)$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde t -genleşme operasyonu da tanımlanabilir.

Bir t -büzme veya genişleme operasyonu regülarite üzerinde beklenen etkiye sahiptir ve ilginç olarak böyle bir büzme işlemi indirgenmiş eşleme sayısını büyültebilir.

Teorem 4.45 (BC, 2014 [7]). Her hangi bir G çizgesi için:

- Eğer $\{x, y\}$ bir t -çift ise $\text{reg}(G) = \text{reg}(t(G; xy))$ dir.
- Eğer $[A_z, B_z]$ tam-çifti $G - N_G[z]$ de bir t -çiftleşimi ise $\text{reg}(G) = \text{reg}(t(G; z, A_z, B_z))$ dir.
- Eğer $\{x, y\}$ bir t -çift ise $\text{im}(t(G; xy)) \geq \text{im}(G)$ dir.
- Eğer $[A_z, B_z]$ tam-çifti $G - N_G[z]$ de bir t -çiftleşimi ise $\text{im}(G) \geq \text{im}(t(G; z, A_z, B_z))$ dir.

Burada t -büzme operasyonun regülariteyi sabit bırakması ve buna karşılık indirgenmiş eşleme sayısını büyültebilmesi, özellikle regülaritesi indirgenmiş eşleme sayısından büyük olan bazı çizgelerde bu boşluğun bu operasyonlar ile doldurulabileceği önsavını ortaya koymuştur.

Tanım 4.46. G ve H iki çizge olsun. Eğer $G = G_0, G_1, \dots, G_k = H$ şeklinde bir dizi mevcut öyleki G_{i+1} çizgesi G_i den bir t -genleşme veya bir t -büzme operasyonu ile elde edilmiş ise H çizgesine G çizgesinin *doğru-ortağı* denir.

Aşkar olarak doğru-ortak olma çizgeler üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Bir G çizgesinin denklik sınıfını \mathcal{M}_G ile gösterirsek, Teorem 4.45'in bir sonucu olarak:

Sonuç 4.47 (BC, 2014 [7]). Eğer $H \in \mathcal{M}_G$ ise $\text{reg}(G) = \text{reg}(H)$ dir.

Tanım 4.48. Her hangi bir G çizgesinin *sanal indirgenmiş eşleme sayısı*

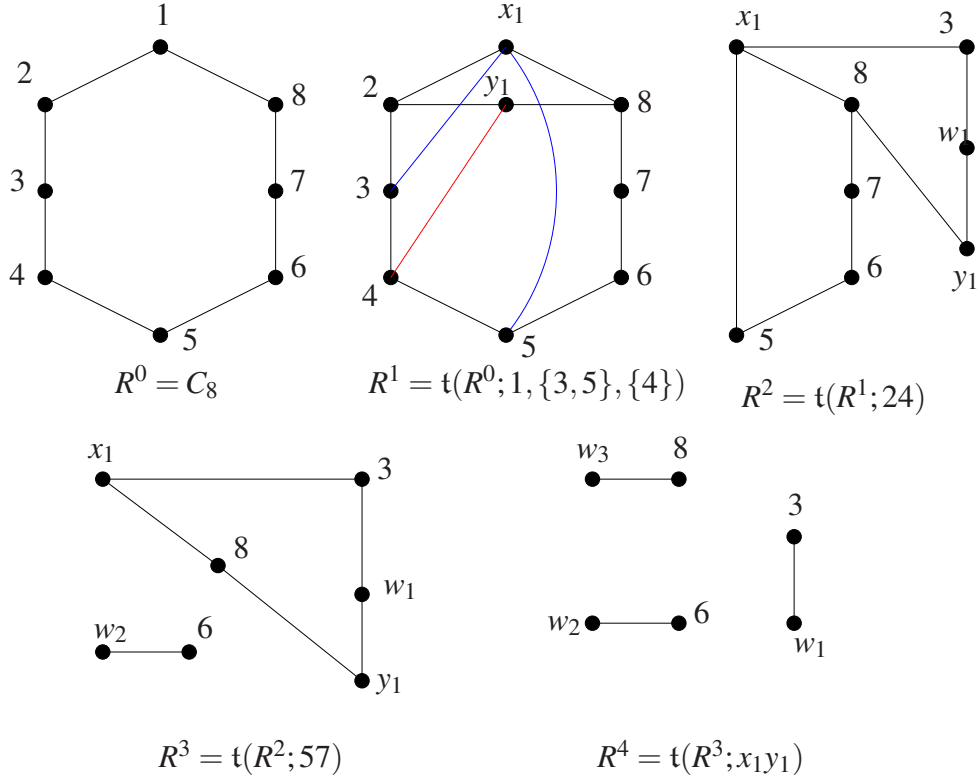
$$\text{vim}(G) := \max\{\text{im}(H) : H \text{ çizgesi } G' \text{ nin bir doğru ortağıdır}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşkar olarak $\text{reg}(G) \geq \text{vim}(G)$ eşitsizliği her G çizgesi için sağlanır.

Örnek 4.49. C_8 çizgesi için $\text{reg}(C_8) = 3$ ve $\text{im}(C_8) = 2$ dir. Burada C_8 çizgesi hiç g -çift içermez. Fakat, önce doğru bir genişleme yapıp ardından ardışık t -büzmeler yaparsak $3K_2$ çizgesine ulaşırız. Diğer bir ifade ile $\text{reg}(C_8) = \text{reg}(3K_2) = \text{vim}(C_8)$ dir (bknz Şekil 4.6).

Aslında Örnek 4.49 deki sonuç bir rastlantı değildir.



Şekil 4.6: C_8 döngü çizgesinin t-genleşme ve ardışık t-büzmeleri.

Önerme 4.50. Her $n \geq 3$ için $\text{reg}(C_n) = \text{vim}(C_n) = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ dir.

Bu bölümün en önemli sonuçlarından biri, sanal indirgenmiş eşleme sayısı ile bir iyi-örtümlü çizge sınıfının regülarite hesabıdır. Bu sınıf özel olarak kuşağı beş veya beşten büyük olan iyi-örtümlü çizgelerde bir alt sınıf olarak barındırmaktadır.

Sonuç 4.51 (BC, 2014 [7]). Eğer G çizgesi bir iyi-örtümlü blok-kaktus çizge ise $\text{reg}(G) = \text{vim}(G)$ dir.

Son olarak çizgelerde kenarların çift bölümü ve kenar büzme operasyonları incelenmiştir.

Teorem 4.52 (BC, 2014 [7]). G bir çizge ve $e \in E$ verilsin.

- $\text{reg}(G/e) \leq \text{reg}(G) \leq \text{reg}(G/e) + 1$ eşitsizliği sağlanır.
- $\text{reg}(D_e(G)) = \text{reg}(G/e) + 1$ dir.
- $\text{reg}(G) \leq \text{reg}(D_e(G)) \leq \text{reg}(G) + 1$ eşitsizliği sağlanır.

4.2 Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi

Hesaplamalı cebirsel topolojinin gelişimine paralel olarak simpleksel komplekslerin homotopi tiplerini belirlemek önemli bir işlev haline gelmiştir [53]. Özellikle üzerinde çalışılan simpleksel kompleks, nümerik bir değişmezi belirlemek veya sınırlamak amacıyla inşaa edilmişse, topolojik hesaplamaların uygulaması net olarak ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda, ilk kez Beineke ve Vandell [3] tarafından tanımlanan ve çizgelerin *döngü-kıran sayısı* (bkn Örnek 1.8) olarak adlandırdığımız nümerik değişmezleri topolojik yapısıyla sınırlayabilecek simpleksel komplekslerin, *döngü-kıran kompleksler* $\Lambda(G)$ homotopi tiplerini hesaplamayı hedefledik. Benzer bir yaklaşım yönlü-çizgeler içinde mevcuttur ve bu durumda ilintili kompleks $\text{Acy}(G)$ şeklinde gösterilir. Her ne kadar proje öneri aşamasında, bu işlem bazı mazgal çizgeler ve hiperküp çizgeler için yapılması planlanmış olsada, her iki durumda da sahip olduğumuz yöntemsel araçların bu hesaplar için yeterli olmadığı gözlemlenmiştir. Bu doğrultuda, proje çalışması kapsamında öncelikle bu simpleksel kompleks ailesinin daha genel bir hali olan *yoksunluk-kompleksleri* tanımlanmış ve bu sınıftaki komplekslerin homotopi tiplerinin hesaplarında kullanılmak üzere önemli bir araç olan indirgeme ve Morse-eşlemeleri kavramları geliştirilmiştir. Bu sonuçların detayına geçmeden önce, mazgal çizgeleriyle ilgili başlangıçta elde edilen sonuç şöyledir:

Teorem 4.53 (DT, 2012). Her $n \geq 2$ için

$$\Lambda(P_2 \times P_n) \simeq \begin{cases} *, & \text{eğer } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ S^{\lfloor \frac{4n-1}{3} \rfloor}, & \text{aksi halde,} \end{cases}$$

sağlanır.

4.2.1 Çizgelerin yoksunluk kompleksleri

Çizgelerin yoksunluk komplekslerinin homotopi tipinin belirlenmesi için iki temel yaklaşımımız oldu. Bunlardan ilki, bu özel durumda bilinen indirgeme operasyonlarını her hangi bir simpleksel kompleks için de çalıştırılabilecek formu belirlemek.

Δ verilen bir V kümesi üzerinde bir simpleksel kompleks olsun. Buradan her hangi bir $A \subseteq V$ altkümesi için

$$\mathcal{D}(A) := \{H \in \Delta : H \cup A \notin \Delta\}$$

tanımlayalım. Özellikle $A = \{p\}$ olduğunda $\mathcal{D}(\{p\})$ yerine $\mathcal{D}(p)$ yazacağız ve $\mathcal{D}[v] := \mathcal{D}(v) \cup$

$\{\{v\}\}$ olarak alacağız.

Teorem 4.54 (DT, 2014 [45]). Δ bir simpleksel kompleks ve u, v iki köşe olsun

- Eğer $\mathcal{D}(u) \subseteq \mathcal{D}(v)$ ise $\Delta \simeq \text{sil}_\Delta(v)$ dir.
- Eğer $\mathcal{D}[u] \subseteq \mathcal{D}[v]$ ise $\Delta \simeq \text{sil}_\Delta(v) \vee \Sigma(\text{bag}_\Delta(v))$ dir.

Bir sonraki adımımız, bir simpleksel kompleksten onun yüzü olmayan bir köşe kümesinin atılmasının bu kompleksin homotopi tipine olan etkisini incelemek olmuştur. Bu bağlamda, eğer $K \subseteq V$ altkümesi Δ nın bir yüzü değil ve bu özelliği ile minimal ise,

$$\mathcal{F}_K^\Delta := \{F \subseteq V : K \subseteq F \text{ öyleki eğer } K \neq H \subsetneq F \text{ ise } H \in \Delta\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

Teorem 4.55 (DT, 2014 [45]). Eğer $\Delta[K] * \text{bag}_{\Delta'}(K)$ altkompleksi Δ da büzülebilir ise

$$\Delta' \simeq \Delta \vee \Sigma(S^{|K|-2} * \text{bag}_{\Delta'}(K)),$$

sağlanır, burada $\Delta' = \Delta \cup \{K\} \cup \mathcal{K}$ ve $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}_K^\Delta$ dir.

Uyarı 4.56. Teorem 4.55 ün sonucu basit homotopi teorisinin temelini teşkil eden elemanter indirgeme teoremini kolaylıkla ispatlar [31]. Benzer şekilde, bağımsızlık kompleksleri için verilen katlama (fold lemma) Önermesi [19], Teorem 4.54 den ve Adamaszek'in kenar silme sonucu [1] Teorem 4.55 den rahatlıkla ispatlanabilir.

Teorem 4.54 'in bir uygulaması olarak $\mathcal{D}(P_n; P_k)$ yoksunluk komplekslerinin homotopi tipini belirledik:

Teorem 4.57 (DT, 2014 [45]). Her $n \geq k$ için

$$\mathcal{D}(P_n; P_k) \simeq \begin{cases} S^{k-t-1}, & \text{eğer } n = (k+1)t, \\ S^{k-t+k-2}, & \text{eğer } n = (k+1)t + k, \\ *, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

sağlanır.

Ayrık Morse teori, Forman tarafından klasik eşleniğinin kesikli versiyonu olarak 90'lı yıllarda ortaya konan ve daha sonra hesap yapılabilirlik noktasında bir dizi değişime uğrayan önemli bir homotopi hesap aracıdır. Dikkat edilecek olunursa, yoksunluk kompleksleri genel olarak birer bağımsızlık kompleksi değildir. Bu bağlamda ayrık Morse teorisinin bağımsızlık kompleksleri üzerindeki hesap araçları burada kullanılamaz. Bu noktada ilk olarak eşleme-ağaçlarını kullanarak Morse-eşlemelerinin her hangi bir simpleksel kompleks üzerinde nasıl inşaa edilebileceğini belirledik. Bu teorisinin tanımsal uzunluğunu dikkate alarak, detayları burada sıralamak yerine okuyucuyu Taylan [45] makalesine yönlendirmeyi tercih ettik. Bu çalışmada üretilen metodolojik yaklaşımın gücünü sergilemesi açısından elde ettiğimiz sonuçları aşağıda ifade ediyoruz.

Teorem 4.58 (DT, 2014 [45]). Her $n \geq k$ ve $2 \leq d \leq k - 1$ için

$$\mathcal{D}(C_n; P_k) \simeq \begin{cases} \bigvee^k S^{t(k-1)-1}, & \text{eğer } n = (k+1)t, \\ S^{t(k-1)-1}, & \text{eğer } n = (k+1)t + 1, \\ S^{t(k-1)+d-2}, & \text{eğer } n = (k+1)t + d, \\ S^{t(k-1)+k-2}, & \text{eğer } n = (k+1)t + k, \end{cases}$$

sağlanır.

İnşaa edilen Morse-eşlemeleri, yoksunluk kompleksleri dışında da homotopi hesabı açısından önemli bir araçtır.

Teorem 4.59 (DT, 2014 [45]). G bir çizge olsun.

- Eğer G üçgensel bir çizge ise G nin baskınlık (hakimiyet) kompleksi $\text{Dom}(G)$ boyutu $v(G) - 1$ olan küreye homotopiktir.
- Özel olarak eğer G bir orman ise $\text{Dom}(G)$ boyutu $m(G) - 1$ olan küreye homotopiktir.

Uyarı 4.60. Morse-eşleme teorisinin inşasından sonra, proje öneri aşamasında teklif ettiğimiz mazgal ve hiperküp çizgelerin döngü-kıran komplekslerinin homotopi tipi belirleme çalışmalarımız yoğun bir şekilde ilerlemektedir.

4.2.2 Turnuva yönlü çizgelerin döngü-kıran kompleksleri

Yukarıda bahsi geçen indirgeme ve Morse-eşleme teorileri, proje kapsamında bazı yönlü turnuva çizgelerin döngü-kıran komplekslerinin homotopik yapılarının keşfinde önemli bir rol oynamıştır.

Ayrıca burada elde edilen topolojik bilgi sayesinde, bu çizgelerin kromatik sayıları için keskin bir üst sınır belirledik ve bu çizgelerin döngü-kıran sayılarını hesapladık.

Her hangi bir $V = V(T)$ köşe kümesi üzerinde bir T turnuva, her $u, v \in V$ için ya uv veya vu nun bir kenar olduğu yönlü çizgedir. Bir diğer ifadeyle, n -köşeli bir T turnuvası, K_n tam çizgesinin bütün kenarlarının yönlendirilmesiyle elde edilen bir yönlü çizgedir. Burada $N^+(S) := \{v \in V : \text{en az bir } u \in S \text{ için } uv \in E(T)\}$ ve $N^-(S) := \{w \in V : \text{en az bir } v \in S \text{ için } wv \in E(T)\}$ kümelerine S kümesinin *dış-komşuluklar* ve *iç-komşulukları* denir. Ayrıca $d^+(x) := |N^+(x)|$ ve $d^-(x) := |N^-(x)|$ sayılarına sırasıyla x köşesinin *dış-derecesi* ve *iç-derecesi* denir.

Eğer her $v \in V$ köşesi için $d^+(v) = d^-(v)$ sağlanıyorsa, T ye *regüler turnuva* denir. Eğer $|T| = n$ olmak üzere bir $k \geq 1$ tamsayısı için $n = 2k + 1$ ise ve T nin köşelerinin $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ şeklinde bir sıralaması var öyleki

$$\text{her } i \in [n] \text{ için } v_i v_j \in E(T_n) \iff l \in [k] \text{ olmak üzere } j \equiv i + l \pmod{n}$$

sağlanıyorsa, T ye *güçlü-regüler turnuva* denir.

$\mathcal{F} := \{\vec{C}_3, \vec{C}_4, \vec{C}_5, \dots\}$ yönlü-döngü çizgelerin ailesi olmak üzere $\mathcal{D}(T; \mathcal{F})$ yoksunluk kompleksine T nin *döngüsüzlük kompleksi* (acyclic complex) denir ve $\text{Acy}(T)$ ile gösterilir. Ayrıca, T nin \mathcal{F} -serbest kromatik sayısı (acyclic chromatic number) kısaca $\chi(T) := \chi_{\mathcal{F}}(T)$ ile ve benzer şekilde T nin döngü-kıran sayısı $\text{fb}(T)$ (feedback number) ile gösterilir.

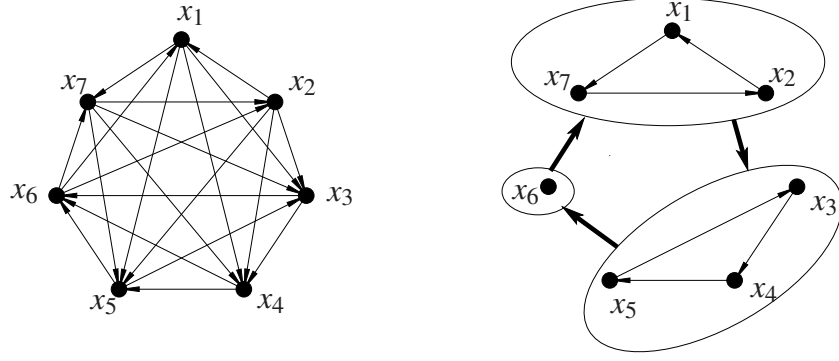
Bir $P \subseteq V$ altkümesi verildiğinde, eğer her $q \in V \setminus P$ için ya $q \Rightarrow P$ veya $P \Rightarrow q$ sağlanıyorsa, P ye bir *eş-davranışlı küme* denir. Buradan bir T turnuvasının köşe kümesi her biri eş-davranışlı küme olacak şekilde P^1, P^2, \dots, P^m altturnuvalara parçalanabilir ve $Q = Q_m$ turnuvası için $V(Q) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ ve $w_i w_j \in E(Q_m)$ ancak ve ancak $P^i \Rightarrow P^j$ sağlanıyorsa, $T = Q_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$ yazılır ve T turnuvası P^1, P^2, \dots, P^m turnuvalarının *bileşkesidir* denir. Burada Q turnuvasında bu bileşkenin *bölümü* denir. Özel olarak R_m bir güçlü-regüler turnuva olmak üzere $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$ ise T ye *güçlü-parçalanabilir turnuva* denir (bkz Şekil 4.7).

Burzio ve Demaria, temel grubu trivial olan turnuvaların bir karakterizasyonunu vermiştir.

Teorem 4.61. [10] Her hangi bir T turnuvası için $\text{Acy}(T)$ basit bağlantılı değildir ancak ve ancak T güçlü-parçalanabilir dir.

Biz bu tip turnuvaların genel olarak hücre yapılarını belirledik.

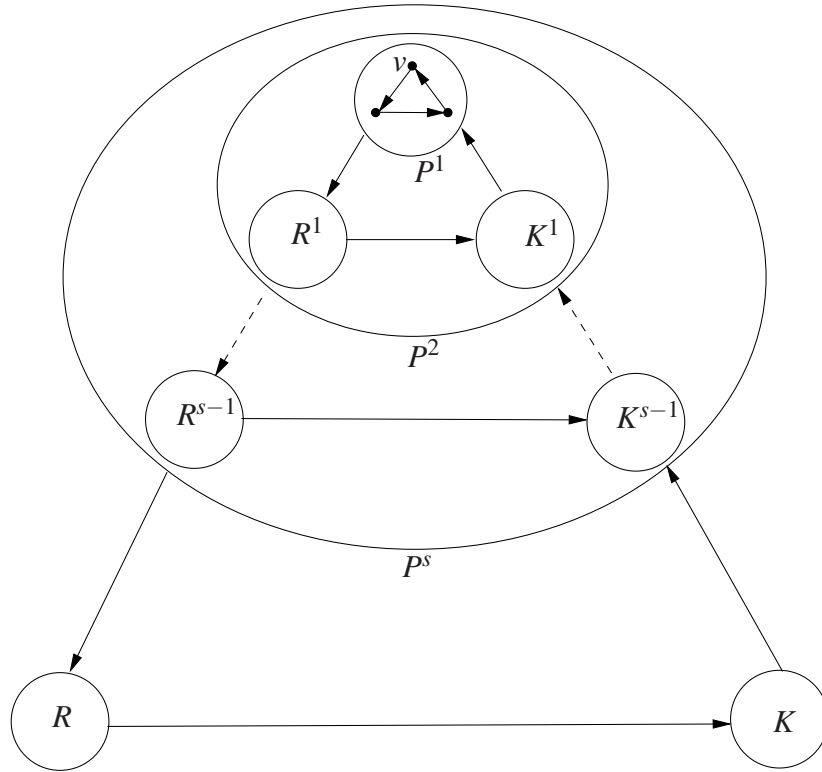
Tanım 4.62 (YC, 2013). Bir T turnuvası verilsin. Eğer T nin kendisi döngüsüz ise veya $T =$



Şekil 4.7: Güçlü-parçalanabilir bir turnuva ve onun güçlü-parçalanışı.

$R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$ olacak şekilde kesitli P^1, P^2, \dots, P^m turnuvaları varsa T ye bir *kesitli turnuva* denir.

Dikkat edilecek olursa, kesitli turnuva tanımı tümevarımsaldır. Ayrıca zaman zaman m tam-sayısını vurgulamak için T ye m -kesitli turnuva diyeceğiz (bknz Şekil 4.8).



Şekil 4.8: Bir 3-kesitli turnuva.

Özel olarak 3-kesitli turnuvaların döngü-kıran komplekslerinin homotopik yapısını net olarak belirledik:

Teorem 4.63 (ZD, 2014 [15]). Eğer $T = R_3(P, R, K)$ bir 3-kesitli turnuva ise

$$\text{Acy}(T) \simeq S^1 \vee \left(\bigvee_{i=1}^{d_2} S^2 \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{d_3} S^3 \right) \vee \dots \vee \left(\bigvee_{i=1}^{d_k} S^k \right)$$

olacak şekilde bir $\{d_2, d_3, \dots, d_k\}$ tamsayı dizisi vardır.

Burada $\text{der}(T)$ ile $\text{Acy}(T)$ nin homotopi denk olduğu kürelerin noktasal birleşimindeki en büyük boyutlu kürenin boyutunu gösterir ve bu sayıya T nin *derinliği* dersek, T nin kromatik sayısı için keskin bir üst sınır elde ederiz.

Teorem 4.64 (ZD, 2014 [15]). $0 < \varepsilon < 1$ sabit bir reel sayı vardır öyleki eğer T bir 3-kesitli turnuva ise $\chi(T) \leq c(\text{der}(T) + 1)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $1.62 < c \leq 2$ reel sayısı mevcuttur.

Bu topolojik değişmez aynı zamanda bu tip turnuva çizgelerin döngü-kıran sayılarını da belirler:

Teorem 4.65 (ZD, 2014 [16]). Bir 3-kesitli T turnuvası için $\text{fb}(T) = n - \text{der}(T) - 1$ dir.

$m > 3$ olmak üzere Teorem 4.64 ve 4.66 nin ispat yöntemleri m -kesitli turnuvalar için artık geçerli değildir. Bu noktada Altbölüm 4.2.1 de geliştirdiğimiz ayrık Morse teori araçları devreye girmiştir. Bu bağlamda, $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$ kesitli turnuvası için $\text{Acy}(P^i)$ kompleksinin Morse-eşlemesi her bir $i \in [m]$ için verildiğinde, $\text{Acy}(T)$ için bir Morse-eşlemenin nasıl inşaa edilebileceğini belirlemiş durumdayız. Bu inşaa aynı zamanda yerelden globale kritik hücreleri ve sayılarını da vermektedir. Bu bilgi doğrultusunda böyle bir turnuvanın döngü-kıran sayısını $\text{Acy}(T)$ kompleksinin homolojik boyutu sayesinde hesapladık.

Teorem 4.66 (ZD, 2014 [16]). Bir m -kesitli T turnuvası için $\text{fb}(T) = n - \text{homboy}(T) - 1$ dir.

Bu tip turnuvaların kromatik sayıları için bir üst sınırı elde etme çalışmalarımız devam etmektedir.



5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu bölümde proje kapsamında elde edilen sonuçların doğruluğu bazı açık problemlerin irdelenmesi yapılacaktır.

5.1 Çizgelerin Castelnuovo-Mumford Regüleritesi

Bu proje çalışmasının önemli çıktılarından biri regüleritenin bazı çizge sınıfları için kesin hesabıdır. Bununla birlikte, özellikle Altbölüm 4.1.1 de elde edilen sonuç, yani bütün kare-serbest monomial ideallerin regüleritelerinin aslında iki-çoklu çizgelerden hesaplanabileceği sonucu ve Lozin operasyonunun etkisi dikkate alındığında, bütün gelecek çalışmaların temel odağı iki-çoklu, maksimum derecesi en fazla üç olan ve kuşağında istenildiği kadar büyük olan çizgelerin regülerite hesabı üzerine yoğunlaşacağı kesindir. Diğer taraftan bu proje kapsamında üretilen asal çizge kavramı yardımıyla, bu indirgenmiş problem aslında bu sınıftaki asal çizgelerin tespiti ve yine bu sınıftaki her hangi bir çizge için asal çizge parçalanışlarının bulunması problemine dönüştürülmüştür.

Asal çizge kavramı doğal olarak keyfi simpleksel kompleksler için de verilebilir. Bu bağlamda Δ simpleksel kompleksi için $\text{reg}_{\mathbb{k}}(\Delta) = k$ ve her $x \in V(\Delta)$ köşesi için $\text{reg}_{\mathbb{k}}(\text{sil}_{\Delta}(x)) = \text{reg}_{\mathbb{k}}(\text{bag}_{\Delta}(x)) = k - 1$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ tamsayısı varsa, Δ ya \mathbb{k} cismi üzerinde *asal simpleksel kompleks* denir. Bu noktada örneğin her hangi bir kürenin minimal üçgenselleştirilmesini veren simpleksel kompleks her cisim üzerinde asaldır ve benzer şekilde projektif düzlemin minimal üçgenselleştirilmesini veren simpleksel kompleks \mathbb{Z}_2 üzerinde asaldır. Buradan her hangi bir simpleksel kompleksin regüleritesi indirgenmiş asal simpleksel altkompleksleri yardımıyla hesaplanabilir.

Bu noktadaki en önemli soru:

Soru 5.1. Sabit bir \mathbb{k} cismi üzerinde asal olan çizgelerin (veya iki-çoklu çizgelerin) kombinatorial bir karakterizasyonu var mıdır?

Bu soru her ne kadar önemli olsada, bu proje çalışmasının sonuçları altında cevabının da pek kolay olmayacağı aşikardır. Bu önsezi doğrultusunda, bu soruyu biraz daha rafine temek mantıklı bir yaklaşım olacaktır.

Soru 5.2. Eğer her hangi bir G iki-çoklu çizgesi C_{6k+2} -serbest ise G için $\text{reg}(G) = \text{im}(G)$ eşitliği sağlanırmı?

Bilgisayar destekli hesaplamalar büyük çoğunlukla bu sorunun doğruluğunu desteklemektedir.

$2K_2$ -serbest çizgeler açısından en önemli sorun Januszkiewicz ve Swiatkowski [27] tarafından varlıkları garanti altına alınan çizgelerin kombinatoriyal betimlemelerinin yapılabilmemesidir. Diğer bir ifadeyle geometrik inşaaın dilinin çizge teorik bir dile kavuşturulabilmesi sorusudur. Zira bu tip çizgeler, varlıkları uzun zamandır bir muamma olan yerel homojen çizgeler (locally homogeneous graphs) açısından oldukça öneme sahiptir (bknz [6]).

Her ne kadar köşe-parçalanabilir çizgeler için $\text{reg}(G) = \text{der}(G) + 1$ eşitliği ispatlanmış olsada, $\text{der}(G)$ değişiminin çizgeden direkt olarak kombinatoriyal bir yolla hesaplanabilirliği hale açık bir sorudur. Bu noktada bir önsavımız vardır:

Soru 5.3. Eğer G köşe-parçalanabilir bir çizge ise $\text{reg}(G) = \text{vim}(G)$ eşitliği sağlanırmı?

Şu an itibari ile ne teorik olarak nede bilgisayar destekli hesaplamalarda bu eşitliğin doğru olmadığı bir aksi örnek bulunamamıştır. Üstelik, genel anlamda her hangi bir G çizgesinin regülaritesi katsayı cisminin karakteristiğinden bağımsız olduğunda da benzer eşitlik için aksi bir örnek inşaa edebilmiş değiliz.

5.2 Döngü-Kıran Komplekslerin Topolojisi

Proje kapsamında geliştirilen ve eşleme-ağaçlarına dayanan Morse-eşleme kavramının özellikle öneri formumuzda yer alan mazgal ve hiperküp çizgelerin döngü-kıran komplekslerinin homotopik yapılarının belirlenmesinde önemli bir rol oynayacağını düşünmekteyiz ve bu çalışma önceliklerimiz arasında ilerlemektedir.

Diğer yandan tunuva yönlü çizgeler için proje kapsamında ortaya konan sonuçların, bazı tümevarımsal basit çizge ailelerinin kromatik ve döngü-kıran sayılarının tespit edilmesinde aktif rol üstelenebileceği kanaatindeyiz. Şu ana kadar yönlü olmayan çizgelerde ilintili kompleksin bağımsızlık kompleksi olması ve bu kompleksin genel olarak çizgenin kromatik veya döngü-kıran sayıları üzerinde her hangi bir etkisinin olmadığı kanısı hakim olduğu düşünülürse, bu açıdan beklenmeyen bir sonuç olarak dikkat çekebilir.

Kaynakça

- [1] M. Adamaszek, *Splittings of independence complexes and the powers of cycles*, J. Combin. Theory, Series A, 119 (2012), 1031-1047.
- [2] D. Attali, A. Lieutier and D. Salinas, *Efficient data structure for representing and simplifying simplicial complexes in high dimensions*, Int. J. Compt. Geometry, 22 (2012), 279-303.
- [3] L.W. Beineke and R.C. Vandell, *Decycling graphs*, J. Graph Theory, 25 (1996), 59-77.
- [4] T. Bıyıkoğlu and Y. Civan, *Four-cycled graphs with topological applications*, Annals Combin., 16 (2012), 37-56.
- [5] T. Bıyıkoğlu and Y. Civan, *Vertex-decomposable graphs, codismantlability, Cohen-Macaulayness, and Castelnuovo-Mumford regularity*, Electronic J. Combin., 21:1, (2014), #P1, 1-17.
- [6] T. Bıyıkoğlu and Y. Civan, *Castelnuovo-Mumford regularity of $2K_2$ -free graphs*, under review, (2014), pp
- [7] T. Bıyıkoğlu and Y. Civan, *Contractions, expansions and Castelnuovo-Mumford regularity*, in preparation, (2014), 14pp.
- [8] T. Bıyıkoğlu and Y. Civan, *Castelnuovo-Mumford regularity of hypergraphs*, in preparation, (2014), 4pp.
- [9] A. Brandstädt, V.B. Le and J.P. Sprinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Disc. Math. and Appl., Philadelphia, 1999.
- [10] M. Burzio and D.C. Demaria, *On simply disconnected tournaments*, Ars Combin. 24 (1987), 149-161.



- [11] K. Cameron, *Induced matchings*, Discrete Applied Math., 24 (1989), 97-102.
- [12] G. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, Rend. Circ. Math. Palermo 7 (1893), 89–110.
- [13] F.R.K. Chung, A. Gyarfás, Z. Tuza and W.T. Trotter, *The maximum number of edges in $2K_2$ -free graphs of bounded degree*, Discrete Math., 81 (1990), 129-135.
- [14] H. Dao, C. Huneke and J. Schweig, *Bounds on the regularity and projective dimension of ideals associated to graphs*, J. Algebraic Combin., 38:1, (2013), 37-55.
- [15] Z. Deniz, *Topology of acyclic complexes of tournaments and coloring*, to appear in Applicable Algebra in Engineering, Comm. and Computing, (2014), 11pp.
- [16] Z. Deniz, *Sectionable tournaments, colorings and feedback numbers*, in preparation, SDU, (2014), 14pp.
- [17] D. Eisenbud and S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra 88 (1984) 89–133.
- [18] R. Ehrenborg and G. Hetyei, *The topology of the independence complex*, European J. of Combinatorics, 27 (2006), 906-923.
- [19] A. Engström, *Complexes of directed trees and independence complexes*, Discrete Math., 309 (10) (2009), 3299-3309.
- [20] A. Finbow, B. Hartnell and R.J. Nowakowski. A characterization of well covered graphs of girth 5 or greater. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 57 (1993), 44-68.
- [21] O. Fernandez-Ramos and P. Gimenez, *Regularity 3 in edge ideals associated to bipartite graphs*, (to appear in) J. Algebraic Combin., (2013), DOI 10.1007/s10801-013-0473-6.
- [22] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Adv. Math., **134:1**, (1998), 90-145.
- [23] H.T. Há and A. Van Tuyl, *Monomial ideals, edge ideals of hypergraphs, and their graded Betti numbers*, J. Alg. Combin., 27 (2008), 215-245.
- [24] H.T. Há, *Regularity of squarefree monomial ideals*, Connections Between Algebra, Combinatorics, and Geometry, Springer Proc. in Math. & Stat., 76, (2014), 251-276.

- [25] G. Hermann, *Über die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale*, Math. Ann., 95 (1926), 736–788..
- [26] H. Hoppe, *Progressive meshes*, Proc. 23rd Annual Conf. Computer Graphics and Interactive Techniques (ACM, 1996), 99–108.
- [27] T. Januszkiewicz and J. Swiatkowski, *Hyperbolic Coxeter groups of large dimension*, Comment. Math. Helv., 78 (2003), 555-583.
- [28] J. Jonsson, *On the topology of independence complexes of triangle-free graphs*, Unpublished manuscript, (2011), available at math.kth.se/~jakobj.
- [29] G. Kalai and R. Meshulam *Leray numbers of projections and a topological Helly-type theorem*, J. Topology, 3 (2008), 551-556.
- [30] M. Katzman, *Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals*, J. Combin. Theory, Ser. A, 113 (2006), 435-454.
- [31] D. Kozlov, *Combinatorial algebraic topology*, Springer, (2008).
- [32] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*. J Combinatorial Theory Ser. A, 25 (1978), 319-324.
- [33] M. Mahmoudi, A. Mousivand, M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai and S. Yassemi, *Vertex decomposability and regularity of very well-covered graphs*, J. Pure and Appl. Alg., 215, (2011), 2473-2480.
- [34] M. Marietti and D. Testa, *Cores of simplicial complexes*, Disc. and Comp. Geometry, 40 (2008), 444-468.
- [35] S. Morey and R.H. Villarreal, *Edge ideals: algebraic and combinatorial properties*, In Progress in Commutative Algebra, Combinatorics and Homology, Vol.1, De Gruyter, Berlin, (2012), pp. 85-126.
- [36] D. Mumford, *Lectures on Curves on an algebraic surface*, Annals of Mathematics Studies 59, Princeton University Press (1966).
- [37] U. Nagel and V. Reiner, *Betti Numbers of Monomial Ideals and Shifted Skew Shapes*, Electronic J. Combin. 16 (2009), no. 2, R3.



- [38] E. Nevo, *Regularity of edge ideals of C_4 -free graphs via the topology of the lcm-lattice*, J. Comb. Theory, Ser. A 118, (2011), 491–501.
- [39] E. Nevo and I. Peeva, *C_4 -free edge ideals*, J. Algebraic Combin., (2012), 6pp, doi:10.1007/s10801-012-0364-2.
- [40] V.V. Lozin, *On maximum induced matchings in bipartite graphs*, Information Processing Letters, 81 (2002), 7-11.
- [41] A. Ooishi, *Castelnuovo-Mumford regularity of graded rings and modules*, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 627–644.
- [42] D. Osajda, *A construction of hyperbolic Coxeter groups*, Comment. Math. Helv., 88 (2013), 353-367.
- [43] P. Przytycki and J. Swiatkowski, *Flag-no-square triangulations and Gromov boundaries in dimension 3*, Groups Geom. Dyn., 3 (2009), 453-468.
- [44] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics 41, Birkhäuser, (1983).
- [45] D. Taylan, *Homotopy type of devoid complexes of graphs*, under review, (2014), 20pp.
- [46] A. Van Tuyl, *Sequentially Cohen-Macaulay bipartite graphs: vertex decomposability and regularity*, Arch. Math., 93 (2009), 451-459.
- [47] R.H. Villarreal, *Cohen-Macaulay graphs*, Manuscripta Math., 66 (1990), 277-293.
- [48] G. Wegner, *d -Collapsing and nerves of families of convex sets*, Arch.Math., 26 (1975), 317–321.
- [49] G. Whieldon, *Jump sequences of ideals*, preprint, (2010), arXiv:1012.0108, 27 pp.
- [50] G.M. Weetman, *A construction of locally homogeneous graphs*, J. London Math. Soc. 50:2, (1994), 66-86.
- [51] R. Woodroffe, *Matchings, coverings, and Castelnuovo-Mumford regularity*, to appear in J. Commutative Algebra, (2012), arXiv:1009.2756v3, 12 pp.
- [52] X. Zheng, *Resolutions of facet ideals*, Comm. Algebra, 32 (2004), 2301-2324.



- [53] A. Zomorodian, *Topology for computing*, Cambridge Monographs on Appl. and Comp. Math., (2009).



TÜBİTAK

PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje No: 111T704
Proje Başlığı: Çizgelerin Castelnovo-Mumford Regüleritesi ve Döngü-Kıran Komplekslerinin Topolojisi
Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar: Prof Dr Yusuf CİVAN (Proje Yürütücüsü) Doç Dr Türker BIYIKOĞLU (Araştırmacı)
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Bölümü, 32260, Isparta/TÜRKİYE
Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi: Destekleyen herhangi bir başka kuruluş yoktur.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 15/04/2012 - 15/10/2014
Öz(en çok 70 kelime) Bu proje çalışmasında bazı kare-serbest monomial ideallerin Castelnovo-Mumford regülerite-leri hesaplanmış ve bu tür hesaplarda kullanılacak yöntemler geliştirilmiştir. Bu doğrultuda, özellikle kombinatoriyal bir yaklaşım takip edilerek bir takım çizgelerin regüleriteleri belirlenmiş veya regülerite için etkin sınırlar ortaya konmuştur. Ayrıca çizgeler ile ilintili yoksunluk kompleks-lerinin topolojik yapıları incelenmiştir. Bu amaç için indirgeme yöntemleri ve Morse-eşlemelerinin inşası betimlenmiş, bazı çizge ve yönlü çizgeler için bu komplekslerin homotopi tipleri tespit edilmiştir.
Anahtar Kelimeler: Castelnovo-Mumford regülerite, kare-serbest monomial ideal, bağımsızlık kompleksi, indirgenmiş eşleme sayısı, yoksunluk kompleksi, Morse-eşleme, döngü-kıran sayısı.
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu ? Evet <input type="checkbox"/> Gerekli Değil <input checked="" type="checkbox"/> Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.
Projeden Yapılan Yayınlar: [1] T. Bıyıkoğlu and Y. Civan, <i>Vertex-decomposable graphs, codismantlability, Cohen-Macaulayness, and Castelnovo-Mumford regularity</i> , Electronic J. Combin., 21:1, (2014), #P1, 1-17. [2] Z. Deniz, <i>Topology of acyclic complexes of tournaments and coloring</i> , to appear in Applicable Algebra in Engineering, Comm. and Computing, (2014), 11pp.