

**Akışkan-Yapı Etkileşimi Problemlerinde Birleşik  
Sayısal/Asimtotik Algoritmalar: Baraj Yıkımı ile Oluşan Akış  
ve Diğer Uygulamalar**

**Proje no:111M209**

Prof. Dr. OĞUZ YILMAZ  
Prof. Dr. ALEXANDER KOROBKIN  
Prof. Dr. ALİ İHSAN NESLİTÜRK  
Dr. ALESSANDRO IAFRATI  
BARIŞ ÇİÇEK  
ADEM KAYA  
DAMLA ISIDICI

Ocak 2014  
İZMİR

# Önsöz

Baraj yıkımı ile oluşan akışın kısa ve geniş zaman evreleri ve kuru ve ıslak taban durumları bu projenin konuları arasındadır. Baraj yıkımı akışının, kuru ve ıslak taban durumlarında, geniş zaman davranışı mühendislik uygulamaları açısından önemlidir. Yıkım sonrası akışın hızı ve akış profilini elde etmek çevre ve inşaat mühendisleri açısından önemlidir. Akışın geniş zaman davranışında sığ su denklemleri çözülmüş ve sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Akışın hızı ve serbest yüzeyin profili hakkında bazı sonuçlara varılmıştır. Geniş zaman davranışı ile akışın dalga hızının ıslak zemindeki su seviyesine bağlı olmadığını kısım ikide göreceğiz.

Baraj yıkımı akışının kısa zaman davranışı (kısım 3-6) ise bir Matematik ve Fizik konusudur; Matematiğin asimtotik yaklaşımları, kompleks analitik fonksiyonlar teorisi, Fourier serileri çözümü, integral transform teknikleri, sınır eleman yöntemi, sonlu farklar metodu ve iki fazlı akışkan için sonlu farklar yöntemi (level set) problemin çözümünde kullanılmıştır. Sonuç olarak jet formasyonu başarılı bir şekilde modellenmiştir. Jet formasyonunun asimtotik ve sayısal olarak modellenmesinde her iki sıvının serbest yüzeylerinin buluştuğu köşe nokta matematiksel bir tekil noktadır. Bu noktanın tekilliğinin kuvvet tekilliği olduğu ve mertebesinin ise sıvıların yoğunluklarının oranına bağlı olduğu bulunmuştur.

Bu proje TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

# İçindekiler

<b>1</b>	<b>Özet</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problemin Geniş Zaman Davranışı</b>	<b>3</b>
2.1	Sığ Su Denklemi . . . . .	3
2.1.1	Sığ su yaklaşımı için sayısal şema . . . . .	4
2.1.2	Bazı gözlemler ve önemli nicelikler . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Baraj-Yıkımı Akışı; Kuru Taban Durumu</b>	<b>10</b>
3.1	Problemin Formülasyonu . . . . .	10
3.2	Sınır değer probleminin yeniden formülasyonu ve Mellin transformu . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Baraj Yıkımı Akışı, Islak Taban Durumu: Fourier Serileri ile Dış Çözüm</b>	<b>22</b>
4.1	Giriş . . . . .	22
4.2	Problemin İfadesi . . . . .	23
4.3	Temel Mertebe Davranışı . . . . .	24
4.3.1	Fourier Serileri ile Çözüm . . . . .	25
4.4	Yakınsaklık Testleri . . . . .	25
4.5	Limit Durumları . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Sınır Eleman Yöntemi (Boundary Element Method)</b>	<b>30</b>
5.1	Problemin Formülasyonu . . . . .	30
5.2	Sınır Eleman Yöntemiyle Sayısal Çözüm . . . . .	32
5.3	İki akışkanlı baraj yıkımı problemine uygulama . . . . .	34
5.4	Sınır Eleman Yöntemi Sonuçları ile Fourier Seri Yöntemi Sonuçlarının Kıyaslanması . . . . .	36
5.5	Tekillik Analizi . . . . .	37
5.5.1	Katsayı $D_R$ 'ın hesaplanması . . . . .	42
<b>6</b>	<b>İki Fazlı Akış için Sonlu Farklar Yöntemi(Level-Set Method)</b>	<b>52</b>
6.1	İki fazlı akış için Navier-Stokes çözücü . . . . .	52
6.2	Hava-sıvı interfazının kinematığı . . . . .	54
6.3	İki akışlı baraj yıkım problemlerine uygulama . . . . .	55
6.3.1	Bölgenin ayrıklaştırılması . . . . .	55
6.3.2	Nümerik Sonuçlar . . . . .	57
<b>7</b>	<b>SONUÇLAR</b>	<b>63</b>
	<b>REFERANSLAR</b>	<b>65</b>

# Şekil Listesi

2.1	Su alanı boyunca su tabanının ve yüzeyinin dikey gösterimi . . . . .	4
2.2	Farklı dispersiyon değerleri için $T = 5$ . saniyede $1/600$ büyüklüğündeki eleman için $z$ çözümleri. . . . .	4
2.3	Modelin tanım çizimi . . . . .	6
2.4	$g = 9.8(ms^{-2})$ için ölçeklenmiş hız ve $H_1/H_2$ oranı. . . . .	6
2.5	$H_1/H_2 = 2$ durumu için ölçeklenmiş hız ve tanım aralığı. Bütün çözümler $T = 3.125$ saniyeye tekabül etmektedir. . . . .	7
2.6	$dz$ ve $dx$ 'in tanım çizimi. . . . .	7
2.7	$g = 9.8(ms^{-2})$ ve $g = 5(ms^{-2})$ için ölçeklenmiş dalga ön hızı ve $H_1/H_2$ oranı. . . . .	8
2.8	$g = 9.8(ms^{-2})$ için farklı zaman adımlarındaki dalga simülasyonları. . . . .	8
2.9	$g = 9.8(ms^{-2})$ için ölçeklenmiş dalga boyu ve $H_1/H_2$ . . . . .	9
3.1	$\xi$ 'in birinci merteye dış çözümü, $t = 0.001$ . . . . .	12
3.2	Yeni koordinatlar $\xi$ , $\eta$ ve iç bölge . . . . .	12
3.3	Dikdörtgen kontur. . . . .	19
3.4	Fonksiyon $\xi^*$ , $r \rightarrow \infty$ iken . . . . .	20
3.5	İç Bölgede Fonksiyon $\xi$ . . . . .	21
4.1	Başlangıç anı, $t' = 0$ 'daki akış bölgesi . . . . .	22
4.2	Temel Mertebe Problemi. . . . .	24
4.3	Yatay hız dağılımı, $x = 0$ ve $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 1$ için. Tam dolu noktalar $\varphi_{0x}^-$ 'i ve boş noktalar $\varphi_{0x}^+$ 'i göstermektedir. Hesaplarda 1500 terim kullanılmıştır. . . . .	27
5.1	Bölgelerin geometrisi ve ana mertebe problemin sınır eleman yöntemindeki sınır şartları. . . . .	31
5.2	Etki katsayılarının hesabı için kullanılan yerel eksen takımı. . . . .	33
5.3	Durum $\delta = 0.5$ için kullanılan ayırıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz. . . . .	36
5.4	Arayüzeydeki yatay hız, $\delta = 0.01$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve sağa doğru ilerledikçe $\gamma$ sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . . .	37
5.5	Arayüzeydeki yatay hız, $\delta = 0.1$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve sağa doğru ilerledikçe $\gamma$ sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . . .	38
5.6	Arayüzeydeki yatay hız, $\delta = 0.25$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve sağa doğru ilerledikçe $\gamma$ sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . . .	39

5.7	Arayüzeydeki yatay hız, $\delta = 0.5$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve sağa doğru ilerledikçe $\gamma$ sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . . .	40
5.8	Arayüzeydeki yatay hız, $\delta = 0.75$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve sağa doğru ilerledikçe $\gamma$ sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . . .	41
5.9	Bölge $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzeydeki dikey hızı, $\delta = 0.01$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve $\gamma$ sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . .	42
5.10	Bölge $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzeydeki dikey hızı, $\delta = 0.1$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve $\gamma$ sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . .	43
5.11	Bölge $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzeydeki dikey hızı, $\delta = 0.25$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve $\gamma$ sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . .	44
5.12	Bölge $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzeydeki dikey hızı, $\delta = 0.5$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve $\gamma$ sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . .	45
5.13	Bölge $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzeydeki dikey hızı, $\delta = 0.75$ durumu için. Eğriler farklı $\gamma$ değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için $\gamma = 0.01$ dir, ve $\gamma$ sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır. . . .	46
5.14	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 0.01$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	46
5.15	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 0.1$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	47
5.16	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 0.25$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	47
5.17	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 0.5$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	48
5.18	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 1$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	48
5.19	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 2$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	49
5.20	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 4$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	49
5.21	Bölge $\Omega^+$ ve $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının, $\delta = 0.5$ ve $\gamma = 10$ durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması. . . . .	50
5.22	Durum $\gamma = 1$ için köşe noktanın geometrisi. . . . .	50
5.23	Durum $\gamma = \infty$ için köşe nokta etrafındaki geometri. . . . .	50
5.24	Fourier Serisi analizinden elde edilen $D_R$ . Parametreler: $\gamma = 1, \delta = 0.5$ . . . . .	51
6.1	Durum $a_m = 0.1, \delta = 0.5$ için kullanılan ayırıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz. . . . .	56
6.2	Durum $a_m = 0.05, \delta = 0.5$ için kullanılan ayırıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz. . . . .	56
6.3	Durum $a_m = 0.005, \delta = 0.5$ için kullanılan ayırıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz. . . . .	57

6.4	Arayüzdeki çözümün $t = 0.05$ anındaki davranışı . . . . .	58
6.5	Arayüzdeki çözümün $t = 0.25$ anındaki davranışı . . . . .	58
6.6	Arayüzdeki çözümün $t = 0.40$ anındaki davranışı . . . . .	59
6.7	Arayüzdeki çözümün $t = 0.50$ anındaki davranışı . . . . .	59
6.8	Arayüzdeki çözümün $t = 0.60$ anındaki davranışı . . . . .	60
6.9	Arayüzdeki çözümün $t = 0.80$ anındaki davranışı . . . . .	60
6.10	Arayüzdeki çözümün $t = 1.05$ anındaki davranışı . . . . .	61
6.11	Arayüzdeki çözümün $t = 1.20$ anındaki davranışı . . . . .	61
6.12	Arayüzdeki çözümün $t = 1.35$ anındaki davranışı . . . . .	62
6.13	Arayüzdeki çözümün $t = 1.40$ anındaki davranışı . . . . .	62
7.1	İç ve Dış Çözümlerle beraber Fonksiyon $\xi$ . . . . .	63

# Tablo Listesi

3.1	$r \rightarrow \infty$ iken küçük $r$ için $\xi^*$ Tablosu . . . . .	18
3.2	Büyük $r$ için $r \rightarrow \infty$ iken $\xi^*$ Tablosu . . . . .	18
3.3	Tablo $\xi^*$ , $r \rightarrow 0$ iken . . . . .	19
3.4	Kesişim noktası civarında $\xi(y, t)$ çözümlerinin kıyaslanması . . . . .	21
4.1	Yakınsaklık; $\delta = 0.5, \gamma = 1, t = 0.1, x = 0, y = 0.5$ parametreleri için . . . . .	26
4.2	Yakınsaklık; $\delta = 0.5, \gamma = 1, t = 0.1, x = 0, y = 0.0$ parametreleri için . . . . .	26
4.3	Yakınsaklık; $\delta = 0.5, \gamma = 1, t = 0.1, x = 0, y = 0.25$ parametreleri için . . . . .	27
4.4	Yatay hız dağılımı, $x = 0$ 'da. Hesaplarda 1500 terim kullanılmıştır. Parametreler Şekil 4.3'dekiyle aynıdır. . . . .	29
5.1	Sınır eleman analizinden $D_R$ değeri : $\delta = 0.5, \gamma = 1, t = 0.1, x = 0$ . . . . .	45

# Bölüm 1

## Özet

Baraj güvenliği ile ilgili ilk yasa acil durumlarda uygulanmak üzere Fransa'da 1968 yılında çıkmıştır. Günümüzde daha büyük barajların yapılması ile daha yeni düzenlemeler getirilmiştir. Baraj güvenliği acil eylem planı şunları içerir; potansiyel risklerin tespiti, bu riskleri önleyecek önlemlerin alınması, yerel yönetimlerin acil durumlardaki sorumluluk tanımı ve bilginin halka iletilmesi. Günümüzde baraj operatörlerinin acil eylem planı ışığında baraj yapılmadan önce risk değerlendirme çalışması yapılması gerekmektedir. Baraj yıkıldıktan sonraki ilk 15 dakika içinde selin ulaşmadığı en yakın güvenli bölgeyi ve selin ulaşabileceği en uzak alanın tesbiti bu risk değerlendirmeleri içerisinde yer almaktadır.

Baraj yıkımı ile oluşan akışın kısa ve geniş zaman evreleri ve kuru ve ıslak taban durumları bu projenin konuları arasındadır. Baraj yıkımı akışının, kuru ve ıslak taban durumlarında, geniş zaman davranışı mühendislik uygulamaları açısından önemlidir. Yıkım sonrası akışın hızı ve akış profilini elde etmek çevre ve inşaat mühendisleri açısından önemlidir. Akışın geniş zaman davranışında sıg su denklemleri çözülecek ve sonlu farklar yöntemi kullanılacaktır. Akışın hızı ve serbest yüzeyin profili hakkında bazı sonuçlara varılacaktır. Geniş zaman davranışı ile akışın, jet formasyonu gibi, bazı detayları kaybolur ancak sıg su denklemi dalganın varış zamanını güvenilir bir şekilde tahmin eder. Su rezervuarının yüksekliği  $H_1$ , ıslak zemindeki su seviyesi  $H_2$  ve yerçekimi ivmesi  $g$  ile gösterildiğinde, sayısal testlerin sonuçlarında, baraj yıkıldıktan sonra dalga hızını, dalganın varış zamanını ve dalga yüksekliğini etkileyen en önemli faktörün  $H_1$  ve  $g$  olduğunu, yani, dalga hızının ıslak zemindeki su seviyesine bağlı olmadığını kısım ikide göreceğiz.

Baraj yıkımı akışının kısa zaman davranışı (kısım 3-6) ise bir temel bilimler (Matematik ve Fizik) konusudur; matematiğin asimtotik yaklaşımları, kompleks analitik fonksiyonlar teorisi, Fourier serileri çözümü, integral transform teknikleri, sınır eleman yöntemi, sonlu farklar metodu ve iki fazlı akışkan için sonlu farklar yöntemi (level set) problemin çözümünde kullanılmıştır. Sonuç olarak jet formasyonu başarılı bir şekilde modellenmiştir.

Baraj yıkımı akışı problemi hem bir mühendislik hem de bir matematik problemidir. Akışın geniş zaman evreleri mühendisleri, kısa zaman evreleri ise daha çok matematikçileri ilgilendirmektedir. Bu projede, proje önerisinde söz verildiği gibi, her iki problemde yer verilmiştir. Proje ekibi de akışın uzun ve kısa zaman davranışını modelleyebilecek teorik kısım (A. Korobkin, O. Yılmaz, D. Isıdıcı) ve sayısal kısım (A. Iafrazi, A.İ. Neslitürk, B. Çiçek, A. Kaya) dan oluşmaktadır. Baraj yıkılmadan önce alınacak tedbirler, statik hesaplar ve baraj emniyeti konusu bu projenin konuları arasında değildir; kabûl edilen proje önerisinde bu tip konular yoktur. Proje önerisinde yapılması taahhüt edilen konular (kısa ve uzun zaman davranışları; kuru ve ıslak taban durumları) proje boyunca detaylı olarak incelenmiştir. Asimtotik ve sayısal yöntem-



lerin sonuçlarının kıyaslamaları projenin önemli bir parçasıdır, deneyler ve deneysel sonuçlar ile kıyaslama projenin konuları arasında değildir.

Baraj yıkılması ile oluşan akış, kuru ve ıslak taban durumları olmak üzere iki ayrı problem olarak ele alınacaktır. Raporun devamında "baraj yıkılması ile oluşan akış" ifadesi yerine "baraj-yıkımı akışı" (bam-break flow) ifadesi kullanılacaktır. Kuru taban durumu (dry bed case) barajın yalnızca bir tarafında akışkan olduğu, ıslak taban (wet bed case) durumu ise barajın her iki tarafında farklı seviyelerde akışkan olduğu durumları ifade eder.

Baraj yıkılması problemi kuru taban durumu, yerçekimi etkisinde yıkılan bir akışkan sütunu gibi düşünülebilir. Bu problemde başlangıçta akışkan sütunu hareketsizdir. Yerçekimi  $t' = 0$  anında "devreye girer" ve akışkan sütunu çökmeye başlar ve aynı anda tabandan etrafa yayılır, bu "taban ilerlemesi" (base surge) olayıdır ve Bikini Lagoon'daki atom bombası denemelerinde gözlemlenmiştir. Penney & Thornhill (1952), daha hafif bir akışkan ile çevrili bir akışkan sütununun yıkılması problemini Euler değişkenlerini kullanarak küçük ve orta zamanlar için incelendi. Silindirik ve yarı küre şeklindeki akışkan için çözümün başlangıç asimtotiklerini elde ettiler ve akışkan hızının çok fazla olduğu taban kısmında buldukları asimtotiklerin geçerli olmadığını gösterdiler.

Yerçekimiyle oluşan akışlar (gravity driven flows) Pohle (1950) ve Stoker (1957) tarafından Lagrange değişkenleri kullanılarak çalışıldı. Ancak katı sınırlar ile serbest su yüzeyinin kesiştiği noktalarda bu yöntem ile sorun yaşanmaktadır. Öyle ki kesişim noktalarına yakın bölgede hangi akışkan parçacıklarının katı yüzeyde hangilerinin serbest yüzeyde kalacağı önceden bilinmemektedir ve çözümün parçası olarak elde edilmektedir. Bu durumda akışkan tarafından işgal edilen bölgeyi sabit kabul eden Lagrange temsili problem yaşamaktadır.

Akışkan sütununun yerçekimiyle yıkılmasına benzer bir problem duvarın akışkana doğru hareket ettiği problemdir. Bu problem King & Needham (1994) tarafından üniform olarak hızlanan plaka için kısa zaman yaklaşımıyla çalışılmıştır. Kuru taban durumu Korobkin & Yılmaz (2009) tarafından kompleks analiz kullanılarak ve dış bölge için birinci ve ikinci derece çözümler bulunarak çözülmüştür. Halbuki King & Needham dış bölge için yalnızca birinci mertebeye çözümler bulmuş ve reel analiz yöntemlerini kullanmıştı. İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü'nde Oğuz Yılmaz danışmanlığında yapılan bir M.Sc. tezinde baraj yıkılması problemi King & Needham'ın yöntemi kullanılarak çözülmüş ve aslında her iki yöntemin birbirine eşdeğer olduğu görülmüştür (Isıdııcı, Aralık 2011).

Bu raporda öncelikle mühendislik uygulaması olan problemin geniş zaman davranışı birinci bölümde incelenecektir. Bu kısımda sonlu farklar yöntemi kullanılarak sığ su denklemleri çözülecektir. Konumuzla yakından ilgili olan, Aralık 2011'de tamamlanan Isıdııcı'nın yüksek lisans tezi kısaca özetlenecektir(3. Kısım). Dördüncü kısımda ıslak taban durumu için dış çözüm Fourier serileri yöntemiyle bulunacak ve köşe noktalarda yatay hızdaki tekillik ortaya konacaktır. Problemin sayısal bir yöntem olan Sınır Elemanı Metodu ile çözümü beşinci kısımda anlatılacaktır. Sınır Elemanı ve Fourier serileri yöntemlerinin kıyaslanması ve tekillik analizi yine beşinci kısımda açıklanacaktır. İki fazlı akış için sonlu farklar yöntemi (Level Set Method) altıncı kısımdadır. Sonuçlar yedinci kısımda özetlenmiştir.

## Bölüm 2

# Problemin Geniş Zaman Davranışı

### 2.1 Sığ Su Denklemi

Baraj yıkım problemi çözümü hem ıslak hem de kuru durumda sığ su denklemi ele alınarak kolay ve etkili bir şekilde elde edilebilir. Buradaki temel varsayımımız dikey ölçeğin yatay ölçeğe kıyasla oldukça küçük olmasıdır. Bu durumda Navier-Stokes denklemi, dikey hızı ve ivmeyi ederek, oldukça basit bir şekilde yazılabilir. Buradan Navier-Stokes denklemi suyun derinliğinde integre edilerek ana denklem suyun yüksekliği ve yatay momentuma bağlı olarak yazılabilir. Tabii ki sığ su yaklaşımından dolayı bazı detaylar kaybolur. Özellikle, dikey hızı ve ivmeyi ihmal ettiğimizden dolayı jet oluşumunu beklememeliyiz. Bununla birlikte, bu güçlü varsayımlara rağmen sığ su denklemi bir çok nedenden dolayı hala oldukça efektiftir. Sığ su yaklaşımı kuru yüzeyde ilerleyen dalgaları daha hızlı tahmin eder ve bu sayede dalganın varış zamanını daha güvenilir tahmin eder. Bazı detaylar kaybolmasına rağmen barajın uzağında su derinliği ile ilgili doğru sonuçlar verir. Eğer yıkım ıslak zemin üzerine ise sığ su yaklaşımı Navier-Stokes yaklaşımı ile elde edilmiş sonuçlar ile uyum içerisindedir. Bunların yanında bazı kısıtlamaları da saymalıyız. Örneğin, eğer serbest yüzey eğriliği fazla ise sığ su yaklaşımı basıncı yanlış tahmin eder. Bu yüzden, yapılar üzerindeki basınç hesaplamada kullanılmamalıdır.

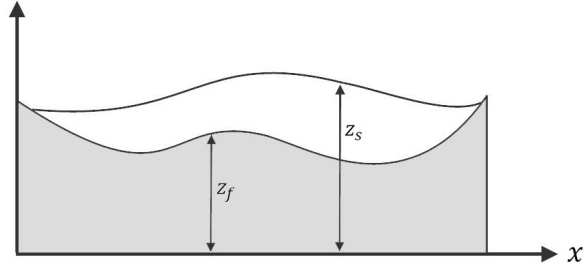
Ana denklem şu şekildedir:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(zv)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

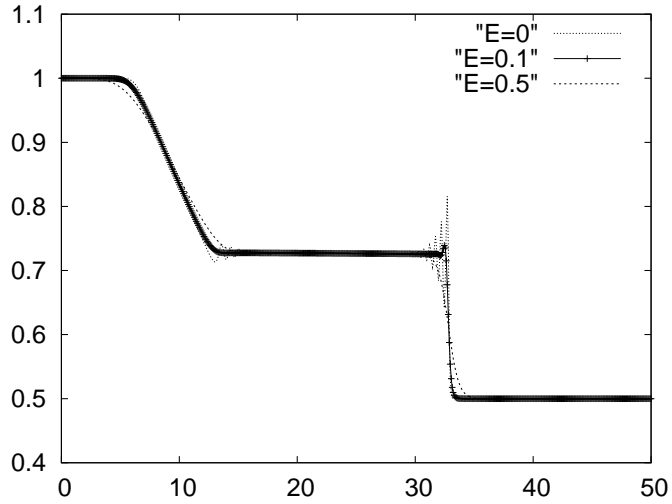
$$\frac{\partial(zv)}{\partial t} + \frac{\partial(zv^2)}{\partial x} + gz \frac{\partial z}{\partial x} + gz \frac{\partial z_f}{\partial x} - v_c \frac{\partial^2(zv)}{\partial x^2} - g \frac{n^2}{z^{1/3}} v|v| - E \frac{\partial^2(zv)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

burada  $z$  su tabakasının kalınlığı ( $m$ ),  $v$  hız ( $ms^{-1}$ ),  $g$  yerçekimi ivmesi ( $ms^{-2}$ ),  $n$  Manning katsayısı,  $v_c$  kinematik viskozite ( $m^2s^{-1}$ ) ve  $z_f$  yatak profilidir.

Dispersiyon katsayısı  $E$  türbülansı ve dikeydeki hızın heterojenliğini hesaba katar. Baraj yıkım probleminde bu büyük bir muammadır ama şekil 2.2'de gördüğümüz sonuçlar bize çözümün stabilizasyonu için metodun suni difuzyona ihtiyaç duyduğunu göstermektedir. 1/600 büyüklüğündeki eleman için optimal değer  $E = 0.1m^2/s$  dir.  $E$  büyüdükçe çözüm daha yaygın ve  $E$  küçüldükçe çözüm daha salınımsal olmaktadır. Su tabakasının kalınlığı,  $z$ 'in tanımı,  $z_s - z_f$ 'dir,  $z_s$  ve  $z_f$  şekil 2.1'deki ölçülerdir.



Şekil 2.1: Su alanı boyunca su tabanının ve yüzeyinin dikey gösterimi



Şekil 2.2: Farklı dispersiyon değerleri için  $T = 5$ . saniyede  $1/600$  büyüklüğündeki eleman için  $z$  çözümleri.

### 2.1.1 Sığ su yaklaşımı için sayısal şema

Sığ su denkleminin zaman integrasyonu için Lax-Wendrof şemasını kullanacağız. Her bir adım, adi diferansiyel denklemler için olan iki-aşama Runge Kutta gibi, iki aşama içeriyor. İlk aşama yarım adımdır. Bu aşama  $Z$  ( $Z = z$ ) ve  $Q$  ( $Q = zv$ ) değerlerini  $n + 1/2$ 'inci zaman adımında ve uzaysal ayrıştırmanın orta noktasında tanımlar,

$$Z_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{1}{2} (Z_{i+1}^j + Z_i^j) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_{i+1}^j - Q_i^j), \quad (2.3)$$

$$Q_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{1}{2} (Q_{i+1}^j + Q_i^j) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( (Q_{i+1}^j)^2 / Z_{i+1}^j + \frac{1}{2} g (Z_{i+1}^j)^2 - (Q_i^j)^2 / Z_i^j + \frac{1}{2} g (Z_i^j)^2 \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_c + E) \frac{(Q_{i+1}^j - 2Q_i^j + Q_{i-1}^j)}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x} g n^2 \left( \frac{Q_{i+1}^j + Q_i^j}{2} \right) \left| \frac{Q_{i+1}^j + Q_i^j}{2} \right| \left( \frac{Z_{i+1}^j + Z_i^j}{2} \right). \quad (2.4)$$

İkinci adım elemanın ortasında ilk aşamada hesaplanan değerler ile zaman adımını tamamlar,

$$Z_i^{j+1} = Z_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1/2}^{j+1/2} - Q_{i-1/2}^{j+1/2}), \quad (2.5)$$

$$Q_i^{j+1} = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (Q_{i+1/2}^{j+1/2})^2 / Z_{i+1/2}^{j+1/2} + \frac{1}{2}g(Z_{i+1/2}^{j+1/2})^2 - (Q_{i-1/2}^j)^2 / Z_{i-1/2}^{j+1/2} + \frac{1}{2}g(Z_{i-1/2}^{j+1/2})^2 \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_c + E) \frac{(Q_{i+1/2}^{j+1/2} - 2Q_{i-1/2}^{j+1/2} + Q_{i-3/2}^{j+1/2})}{\Delta x} - \Delta t g n^2 * Q_{i+1/2}^{j+1/2} |Q_{i+1/2}^{j+1/2}| Z_{i+1/2}^{j+1/2}, \quad (2.6)$$

burada,  $Z_i^j$  büyüklüğü,  $j$ 'inci zaman adımındaki  $i$ 'inci elemandaki sayısal yaklaşımdır.

## 2.1.2 Bazı gözlemler ve önemli nicelikler

Bu bölümde (Ritter, 1892) tarafından verilen analitik çözümü kullanarak bazı gözlemler yapacağız. Metodun geçerliliği (Lencina, 2007)'de yapılmıştır.

Su tabakasının kalınlığı  $z$  ve hız  $v$  için başlangıç koşulları şu şekildedir;

$$z(x, 0) = \begin{cases} H_1 & \text{if } x < 0, \\ z = 0 & \text{if } x > 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$v(x, 0) = 0. \quad (2.8)$$

Böylece, barajın aşağı akış yönünde taban kuru kabûl edilmiştir ve akışkan başlangıçta dingedir. Çözüm şu şekildedir;

$$z(x, t) = \frac{(2\sqrt{gH_1} - \frac{x}{t})^2}{9g} \quad (2.9)$$

$$v(x, t) = \frac{2}{3} \left( \sqrt{gH_1} + \frac{x}{t} \right); \quad (2.10)$$

ve şu aralıkta tanımlanmıştır

$$-t\sqrt{gH_1} < x < 2t\sqrt{gH_1}. \quad (2.11)$$

Bu aralık dışında,  $z(x, t)$  ve  $v(x, t)$  değerleri dalga tarafından etkilenmemektedir ve başlangıç koşulu ile aynıdır.  $z(x, t)$  ve  $v(x, t)$  çözümündeki  $\sqrt{gH_1}$  büyüklüğü yerçekim dalgasıdır ve bu büyüklüğün  $v(x, t)$  için supremum değer olduğunu denklem (2.10) ve (2.11)'den görebiliriz. Biz bunu Lax-Wendrof şemasından göstereceğiz. Sayısal yaklaşım için 50 m uzunluğunda bir alan ele aldık ve buradaki baraj şekil 2.3'de gösterilmiştir. Su haznesinin yüksekliği ve çıkış suyunun yüksekliği sırasıyla  $H_1$  ve  $H_2$ 'dir. Kinematik viskoziteyi,  $v_c$ ,  $10^{-6}$ , dispersiyon katsayısını,  $E$ , 0.2 ve yerçekimi ivmesini 9.8 aldık. Düz bir zemin kullandığımızdan denklem (2.2)'deki  $\frac{\partial z_f}{\partial x}$  terimi kaybolur.  $z(x, t)$  ve  $v(x, t)$  başlangıç değerleri tanımları aşağıdaki gibidir,

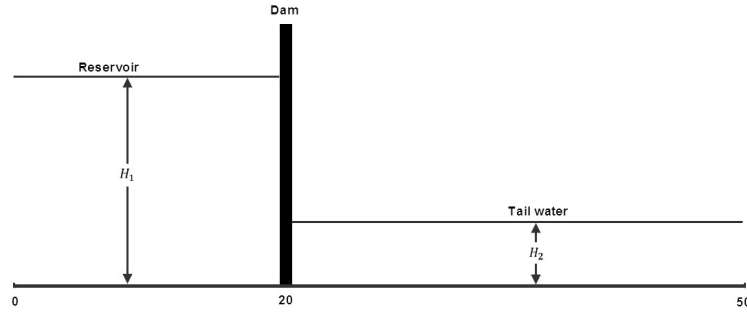
$$z(x, 0) = \begin{cases} H_1 & \text{if } x < 20, \\ H_2 & \text{if } x > 20 \end{cases} \quad (2.12)$$

ve  $v(x, 0) = 0$ 'dır sırasıyla. İlk olarak farklı  $H_1/H_2$  oranlarında farklı  $H_1$  ve  $H_2$  değerleri için hızı hesapladık.  $H_1 = 1\text{m}$  için  $H_2 = 0.18, 0.2, 0.225, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9\text{m}$  ve  $H_1 = 2\text{m}$  için  $H_2 = 0.36, 0.4, 0.45, 0.6, 0.8, 1, 1.4, 1.8\text{m}$  aldık. Son zamanı 5 saniye aldık ve 800 zaman adımı ve 0.833 büyüklüğünde eleman kullandık.  $H_1 = 1, 2\text{m}$  için  $\sqrt{gH_1}$  ölçeklenmiş maksimum hızlar  $t = 3.125$  saniyede farklı oranlarda şekil 2.4'de verilmiştir. Şekil 2.4'de görüyoruz

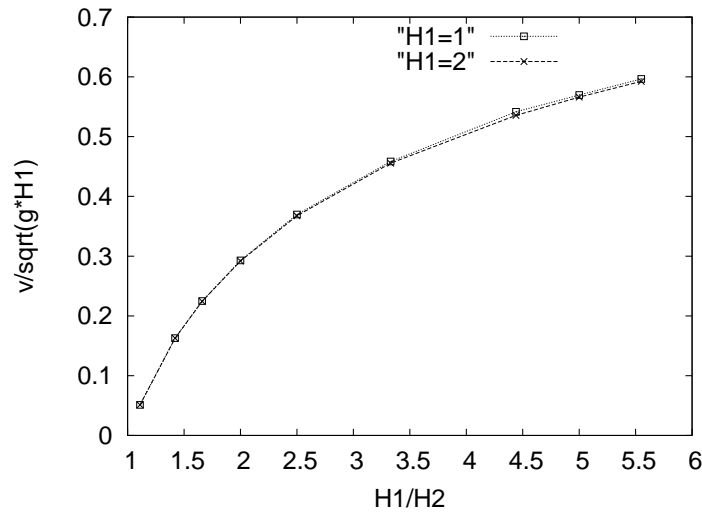
ki ölçeklenmiş hızlar  $H_1 = 1, 2\text{m}$  için örtüşüyor. Bu bir tesadüf değildir. Bu şu anlama gelmektedir;  $H_1 = 1\text{m}$  ve  $H_2 = 2\text{m}$  için maksimum hızlar sırasıyla  $\sqrt{g \times 1}$  ve  $\sqrt{g \times 2}$ 'dir.  $t = 3.125$  saniyede  $g = 1, 5, 9.8(m s^{-2})$  ve  $H_1 = 1\text{m}$  için  $\sqrt{gH_1}$  ile ölçeklenmiş hızlar şekil 2.5'de gösterilmiştir. Ölçeklenmiş hızların maksimum değerleri yaklaşık olarak aynı ve bu bize  $g = 1, g = 5$  ve  $g = 9.8$  için maksimum hızın sırasıyla  $\sqrt{1 \times 1}, \sqrt{5 \times 1}$  ve  $\sqrt{9.8 \times 1}$  olduğunu göstermektedir. Şekil 2.6'da dalga yüksekliği  $dz$  ve iki dalga arasındaki fark  $dx, t_1$  ve  $t_2$  zamanlarında gösterilmiştir. Dalga ön hızını (wave front velocity) ( $v_{wf}$ ) hesaplamak için şu formülü kullanırız;

$$v_{wf} = \frac{dx}{dt} \quad (2.13)$$

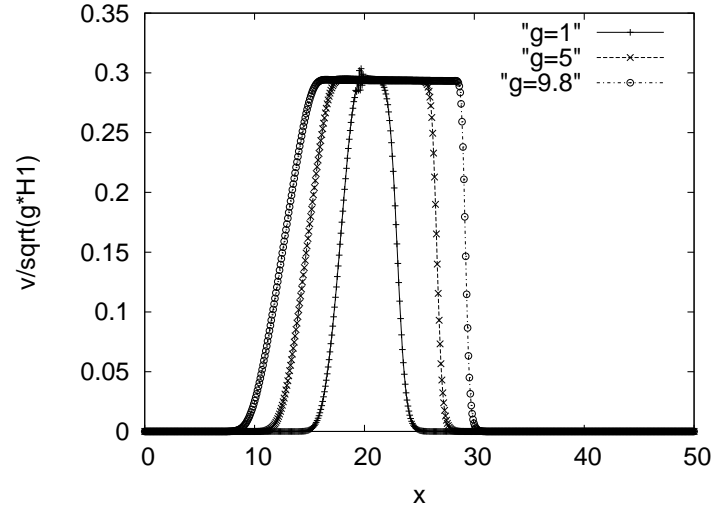
burada  $dt = t_2 - t_1$ . Şekil 2.7'de dalga ön hızları ( $v_{wf}$ )  $H_1 = 1, 2\text{m}$  için farklı  $H_1/H_2$  oranlarında ve  $g = 9.8$  ve  $g = 5$  için  $\sqrt{gH_1}$  ile ölçeklenmiş olarak gösterilmiştir. Şekil 2.7'den söyleyebiliriz ki dalga ön hızı  $H_1$  için  $H_2$ 'ye fazla bağlı değildir ve ön dalga hızının maksimum değeri yaklaşık olarak  $\sqrt{gH_1}$ 'dir. Şekil 2.8'de farklı zamanlarda dalga simülasyonları verilmiştir ve buradan söyleyebiliriz ki dalga ön hızı zamana göre sabittir.  $H_1 = 1, 2\text{m}$  için farklı  $H_1/H_2$  oranlarında dalga yüksekliğini,  $dz$ , inceledik.  $H_1$  ile ölçeklenmiş dalga yüksekliği şekil 2.9'da gösterilmiştir. Farklı  $H_1$  değerlerindeki dalga boyu grafiği örtüşmektedir.  $H_1 = 1\text{m}$  için maksimum dalga yüksekliği yaklaşık olarak  $0.35\text{m}$  dir.



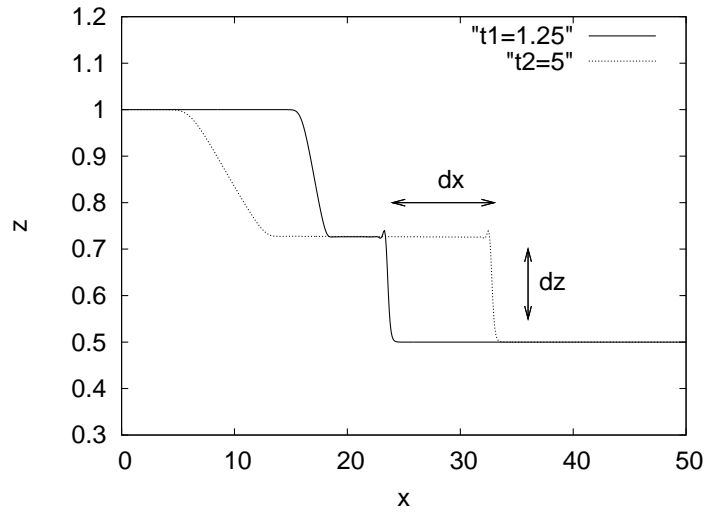
Şekil 2.3: Modelin tanım çizimi



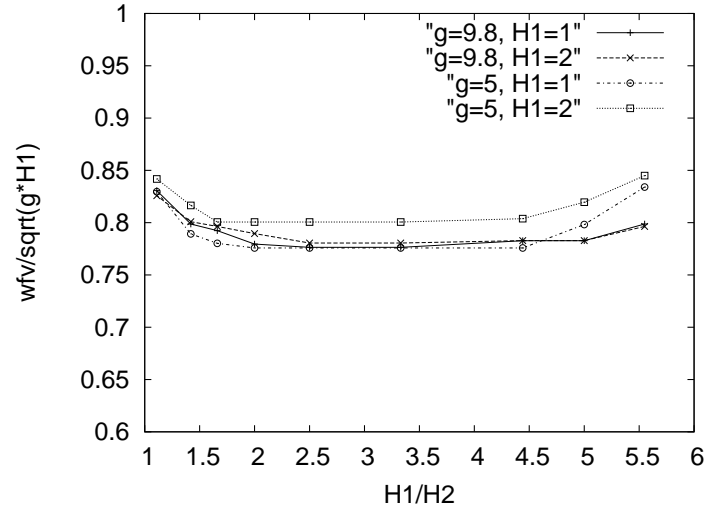
Şekil 2.4:  $g = 9.8(m s^{-2})$  için ölçeklenmiş hız ve  $H_1/H_2$  oranı.



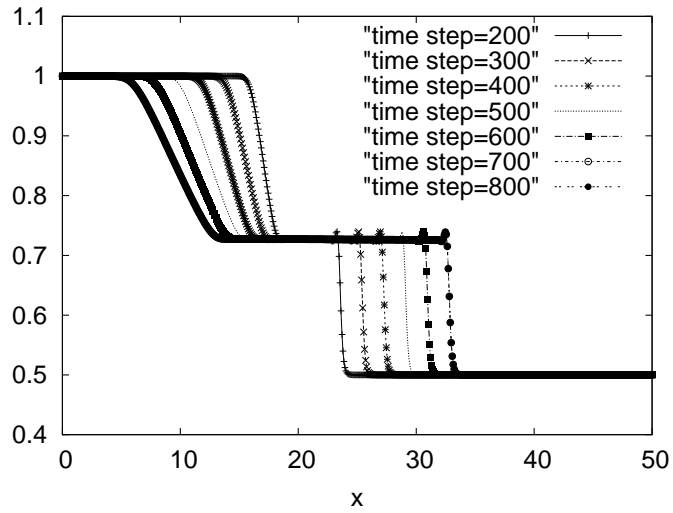
Şekil 2.5:  $H_1/H_2 = 2$  durumu için ölçeklenmiş hız ve tanım aralığı. Bütün çözümler  $T = 3.125$  saniyeye tekabül etmektedir.



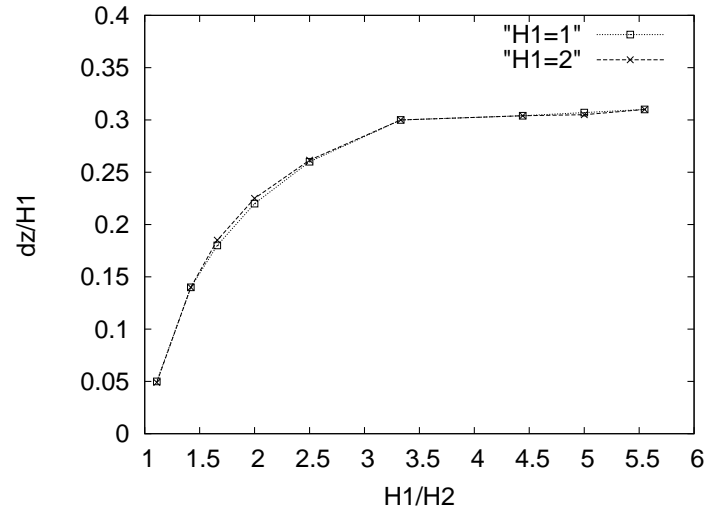
Şekil 2.6:  $dz$  ve  $dx$ 'in tanım çizimi.



Şekil 2.7:  $g = 9.8(m s^{-2})$  ve  $g = 5(m s^{-2})$  için ölçeklenmiş dalga ön hızı ve  $H_1/H_2$  oranı.



Şekil 2.8:  $g = 9.8(m s^{-2})$  için farklı zaman adımlarındaki dalga simülasyonları.



Şekil 2.9:  $g = 9.8(m.s^{-2})$  için ölçeklenmiş dalga boyu ve  $H_1/H_2$ .



## Bölüm 3

# Baraj-Yıkımı Akışı; Kuru Taban Durumu

### 3.1 Problemin Formülasyonu

Problemi çözmek için akışkan hareketinin Euler denklemleri ile serbest yüzeyin kinematik ve dinamik şartları ve tabandaki kayma (slip) sınır şartını kullanacağız. Boyutsuz üssüz değişkenler aşağıdaki gibidir,

$$x' = Hx \quad , \quad \eta' = H\eta \quad , \quad (3.1)$$

$$y' = Hy \quad , \quad \xi' = H\xi \quad , \quad (3.2)$$

$$t' = Tt \quad , \quad p' = p\rho gH \quad . \quad (3.3)$$

Problemın matematiksel ifadesi Şimdi boyutsuz bir doğrusal olmayan denklem olarak

$$u_x + v_y = 0, \quad (3.4)$$

$$u_t + uu_x + vv_y = -p_x, \quad (3.5)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -p_y - 1, \quad (3.6)$$

$$v = \eta_t + u\eta_x, \quad p = 0 \quad \text{on } y = \eta(x, t), \quad (3.7)$$

$$u = \xi_t + v\xi_y, \quad p = 0 \quad \text{on } x = \xi(y, t), \quad (3.8)$$

$$v(x, -1, t) = 0 \quad (3.9)$$

$$\eta(x, 0) = \xi(y, 0) = 0, \quad u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0, \quad (3.10)$$

$$x \rightarrow \infty \text{ iken, } u, v \rightarrow 0 \text{ ve } p \rightarrow -y \quad (3.11)$$

Şeklinde yazılır. Bu denklem takımı iÇin cozum bölgesi

$$D(t) = \{(x, y) : -1 \leq y \leq \eta(x, t), \xi(y, t) \leq x \leq \infty\}.$$

dir. Denklem (3.4) - (3.10)'in kısa zaman cozm

$$u = u_0(x, y) + tu_1(x, y) + O(t^2), \quad (3.12)$$

$$v = v_0(x, y) + tv_1(x, y) + O(t^2), \quad (3.13)$$

$$\eta = \eta_0(x) + t\eta_1(x) + t^2\eta_2(x) + O(t^3), \quad (3.14)$$

$$\xi = \xi_0(y) + t\xi_1(y) + t^2\xi_2(y) + O(t^3), \quad (3.15)$$

$$p = p_0(x, y) + tp_1(x, y) + O(t^2) \quad (3.16)$$

aÇılımları ile aranabilir, aŐılımda  $t \rightarrow 0$  ve  $\mathbf{x} = O(1)$  dir.

Temel mertebede (leading order), aşağıdaki sınır değer problemi

$$\left. \begin{aligned} u_{1,x} + v_{1,y} &= 0, \\ u_1 &= -p_{0,x}, \quad v_1 = -p_{0,y} - 1, \\ v_1(x, -1) &= 0, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}v_1(x, 0), \quad \xi_2 = \frac{1}{2}u_1(0, y), \\ p_0(x, 0) &= 0, \quad p_0(0, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

bulunur, burada  $u_1, v_1 \rightarrow 0$  ve  $p_0 \rightarrow -y, x \rightarrow \infty$  iken.

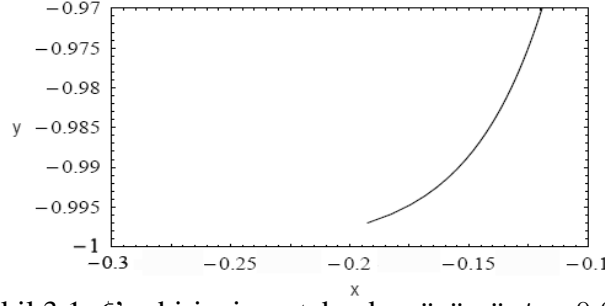
Problem (3.17)'in cozm değişkenleri ayırma (separation of variables) yöntemiyle

$$p_0(x, y) = -y + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}y\right) e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}x}, \quad (3.18)$$

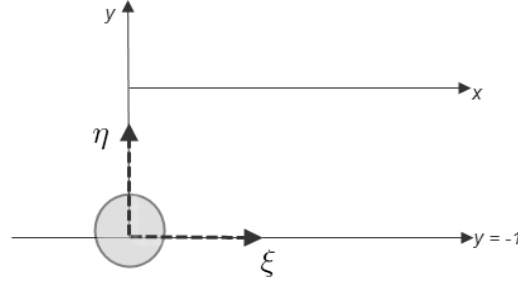
$$\xi_2(y) = \frac{2}{\pi} \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{i\frac{\pi}{2}y})^{2n+1}}{2n+1}. \quad (3.19)$$

Şeklinde bulunur. Bu seri (3.19) tam olarak toplanır,  $\xi_2 = \frac{1}{\pi} \log(\tan \frac{\pi}{4}(1+y))$  burada  $y \rightarrow -1$  iken serbest yüzey bir tekillik ortaya Őıkar (Şekil 3.1).

(0, -1) noktası etrafındaki aŐılımdaki düzensizlik aÇılımların, (3.13)-(3.16), bu problem iÇin dış cozm olduğuna işaret etmektedir. O nokta etrafındaki davranışı doğru olarak saptayabilmek



Şekil 3.1:  $\xi$ 'in birinci merteye dış çözümü,  $t = 0.001$



Şekil 3.2: Yeni koordinatlar  $\xi$ ,  $\eta$  ve iç bölge

için bir iç bölgeye ihtiyaç var, öyle ki  $t \rightarrow 0$  iken  $x, y = o(1)$ . İç açılımı bulabilmek için  $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  iken basınç  $p_0$ 'ın yerel davranışını bulmalıyız. Öncelikle değişkenleri değiştirirerek  $\xi = x$  and  $\eta = y + 1$ , orijini tekil noktaya taşıyoruz ve sonrada polar koordinatları kullanıyoruz  $\xi = \rho \cos \theta$  ve  $\eta = \rho \sin \theta$ , burada  $(\rho, \theta)$  orijindeki standart polar koordinatlardır (Şekil 3.2). Yani  $(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  (i.e. as  $\rho \rightarrow 0$ ) iken basınç  $p_0$ 'ın yerel davranışını bulmalıyız. Sonra  $p_0 = P$  olarak, çeyrek düzlemde  $0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  aşağıdaki sınır problemini elde ederiz:

$$\left. \begin{aligned} \Delta P &= 0, \\ P_\theta &= -\rho \quad \text{on } \theta = 0, \quad P = 0 \quad \text{on } \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \text{ve } P_\theta &= \frac{2}{\pi} \rho \log \rho + \frac{2}{\pi} \rho \log \frac{\pi}{4} + O(\rho^3) \quad \text{on } \theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Küçük  $\rho$  için çözümü bulmak istediğimiz için

$$P = \rho(\log \rho)g(\theta) + \rho h(\theta) + O(\rho) \quad \rho \rightarrow 0 \text{ iken},$$

şeklinde bir koordinat açılımı öneriyoruz ve bazı basit hesaplardan sonra  $g(\theta)$  ve  $h(\theta)$ 'nın genel çözümlerini

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{-2}{\pi} \cos \theta, \\ h(\theta) &= -\sin \theta + \frac{2}{\pi} \left( 1 - \log\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos \theta + \frac{2}{\pi} \theta \sin \theta \right). \end{aligned}$$

buluyoruz. Böylece  $\rho \rightarrow 0$  iken daha sonra gerekli olacak olan asimtotik eşleme şartlarını (dış çözümün  $\rho \rightarrow 0$  iken limit değerleri)

$$p_0 = \rho \log \rho \left( -\frac{2}{\pi} \cos \theta \right) + \rho \left( -\sin \theta + \frac{2}{\pi} \left( 1 - \log\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) + \frac{2}{\pi} \theta \sin \theta \right) + o(\rho), \quad (3.21)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\pi} \log \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \log \eta + O(\eta^2) \quad \text{as } \eta = \rho \rightarrow 0.$$

buluyoruz. Bu göstermektedir ki  $\rho \rightarrow 0$  iken  $p_0 = O(\rho \log \rho)$  and  $\xi_2 = O(\log \rho)$ .

Köşe noktadaki akışkan hızları (3.17)'den  $u_1 = -p_{0,\xi}$  ve  $v_1 = -p_{0,\eta} - 1$  denklemleri ile hesaplanır. Sonra zincir kuralı ile  $\rho \rightarrow 0$  iken  $u_1 = O(\log \rho)$  ve  $v_1 = O(1)$ .

$t \rightarrow 0$  iken  $\xi, \eta = o(1)$  olduğunda problemin bir iç çözümünü bulmak için hız bileşenlerinde (3.4)-(3.6) kullanılan ve ihmal edilen terimleri incelemek faydalı olacaktır. Yerel analiz göstermektedir ki,  $\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  iken

$$u = O(t \log \rho), \quad v = O(t), \quad (3.22)$$

$$P = O(\rho \log \rho), \quad \xi = O(t^2 \log \rho). \quad (3.23)$$

olur. Böylece (3.6)'de kullanılan terim  $v_t = O(1)$  iken ihmal edilen terim ise  $uv_x = O((t^2 \log \rho)/\rho)$  dir, bu da akışkan ataletini temsil eder. Bu iki terim  $t^2 \log \rho = O(\rho)$  olduğunda aynı büyüklüktedir. Eğer bu iteratif olarak çözümlerse

$\rho = O(-t^2 \log t)$  olduğunda atalet terimleri önem kazanır ve bu bölgede  $v = O(t)$ ,  $u = O(t \log t)$ ,  $p = O(t^2 \log^2 t)$  ve  $\xi = O(t^2 \log t)$  olur. Bu tahminler aşağıdaki iç değişkenleri önerir:

$$X = -\frac{\xi}{t^2 \log t}, \quad Y = -\frac{\eta}{t^2 \log t}, \quad U = u, \quad V = v, \quad P = p. \quad (3.24)$$

bu da

$$\left. \begin{aligned} &U_X + V_Y = 0, \\ &U_t - X \left( \frac{2}{t} + \frac{1}{t \log t} \right) U_X - Y \left( \frac{2}{t} + \frac{1}{t \log t} \right) U_Y - \frac{1}{t^2 \log t} U U_X \\ &\quad - \frac{1}{t^2 \log t} V U_Y = \frac{1}{t^2 \log t} P_X, \\ &V_t - X \left( \frac{2}{t} + \frac{1}{t \log t} \right) V_X - Y \left( \frac{2}{t} + \frac{1}{t \log t} \right) V_Y - \frac{1}{t^2 \log t} U V_X \\ &\quad - \frac{1}{t^2 \log t} V V_Y = \frac{1}{t^2 \log t} P_Y - 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

verir, burada  $0 \leq Y < \infty$ ,  $X \geq \xi(Y, t)/(-t^2 \log t)$  ve serbest su yüzeyi şartları

$$U = \xi_t - Y \left( \frac{2}{t} + \frac{1}{t \log t} \right) \xi_Y - \left( -\frac{1}{t^2 \log t} \right) V \xi_Y \quad \text{and} \quad P = 0. \quad (3.26)$$

şeklini alır.

Eşleme şartları (3.21) iç değişkenler cinsinden yazıldığında ve  $R = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$  limitinde uygulandığında iç bölge probleminin aşağıdaki küçük zaman açılımlarını elde ederiz,

$$P = t^2 (\log t)^2 P_1 + t^2 \log t P_2 + o(t^2 \log t), \quad \xi = t^2 \log t \xi_1 + t^2 \xi_2 + o(t^2), \quad (3.27)$$

$$U = t \log t U_1 + t U_2 + o(t), \quad V = t \log t V_1 + t V_2 + o(t) \quad (3.28)$$

$t \rightarrow 0$  ile  $X, Y = O(1)$  iken. Yukarıdaki açılımları iç bölge problemine (3.25)-(3.26) yerleştirdiğimizde, temel mertebede,

$$\left. \begin{aligned} U_{1,X} + V_{1,Y} &= 0, \\ U_1 - 2XU_{1,X} - 2YU_{1,Y} - U_1U_{1,X} - V_1U_{1,Y} &= P_{1,X}, \\ V_1 - 2XV_{1,X} - 2YV_{1,Y} - U_1V_{1,X} - V_1V_{1,Y} &= P_{1,Y}, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

$0 \leq Y < \infty$ ,  $X > -\xi_1$  bölgesinde, elde ederiz,  $X = -\xi_1$ 'de serbest yüzey şartları

$$U_1 = 2\xi_1 - 2Y\xi_{1,Y} - V_1\xi_{1,Y} \quad \text{and} \quad P_1 = 0, \quad (3.30)$$

olur. Uygun eşleme şartları denklemleri ile

$$P_1 \sim \frac{4}{\pi}X \quad , \quad \xi_1 \sim \frac{2}{\pi} \quad , \quad U_1 \sim \frac{4}{\pi} \quad , \quad V_1 \sim 0 \quad \text{as} \quad (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty, \quad (3.31)$$

verilir. Bu eşleme şartları temel merteye probleminin çözümü veya çözümün bir parçası olmalıdır. Bunu kullanarak, problemin tam çözümü

$$U_1 \equiv \frac{4}{\pi} \quad , \quad V_1 \equiv 0 \quad , \quad P_1 \equiv \frac{4}{\pi} \left( X + \frac{2}{\pi} \right) \quad , \quad \xi_1 \equiv \frac{2}{\pi}, \quad (3.32)$$

olur. Benzer şekilde, pertürbasyon işleminde ikinci merteye problemi,

$$\left. \begin{aligned} U_{2,X} + V_{2,Y} &= 0, \\ \frac{4}{\pi} + U_2 - 2XU_{2,X} - 2YU_{2,Y} - \frac{4}{\pi}U_{2,X} &= P_{2,X}, \\ V_2 - 2XV_{2,X} - 2YV_{2,Y} - \frac{4}{\pi}V_{2,X} &= P_{2,Y} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

sabit  $0 \leq Y < \infty$ ,  $X > -\frac{2}{\pi}$  bölgesinde, elde edilir.  $X = -\frac{2}{\pi}$  deki serbest yüzey şartları

$$P_2 = \frac{4}{\pi}\xi_2 \quad , \quad U_2 = \frac{2}{\pi} + 2\xi_2 - 2Y\xi_{2,Y} \quad (3.34)$$

olur ve eşleme şartları

$$P_2 \sim \frac{2}{\pi} \left\{ (\lambda - 1)X + \log RX + \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) Y \right\} \quad , \quad \xi_2 \sim \frac{1}{\pi} (\lambda + \log Y), \quad (3.35)$$

$$U_2 \sim \frac{2}{\pi} \lambda - 1 + \log R \quad , \quad V_2 \sim -\frac{2}{\pi} \theta, \quad (3.36)$$

$(X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$  iken, şeklinde bulunur. Burada  $\lambda = \log(-\log t) + \log(\frac{\pi}{4})$  Van Dyke eşleme prensibine göre bir sabit olarak alınır.  $(R, \theta)$ ,  $(X, Y)$  kartezyen koordinatlarıyla bağlantılı polar koordinatlardır.

Yukarıdaki çeyrek düzlem probleminin, (3.33)-(3.36), çözümü bir integral transformu yöntemiyle bulunabilir.

### 3.2 Sınır değer probleminin yeniden formülasyonu ve Mellin transformu

Çeyrek düzlemdeki sınır değer probleminin, (3.33)-(3.36), çözümü basit değildir. Çözüm için yeni bağımlı ve bağımsız değişkenler

$$u = U_2 + \frac{4}{\pi}, \quad v = V_2, \quad p = P_2 - Y, \quad \xi = \xi_2, \quad X = x - \frac{2}{\pi}, \quad y = Y,$$

tanımlanmalıdır. Yeni formülasyon (3.33)-(3.34) denklemlerinin daha simetrik şeklini

$$\left. \begin{aligned} u_x + v_y &= 0, \\ u - 2xu_x - 2yu_y &= p_x, \\ v - 2xv_x - 2yv_y &= p_y \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$0 \leq y < \infty, 0 < x < \infty$  bölgesinde, verir ve serbest yüzey şartları

$$p(0, y) = \frac{4}{\pi}\xi - y, \quad u(0, y) = \frac{6}{\pi} + 2\xi - 2y\xi_y \quad (3.38)$$

olur. Buradan irrotasyonel akış bulunur. Bu da bize akışı hız potansiyeli  $\phi$  ile temsil etmemize imkan tanır. Burada hızlar  $u = \phi_x, v = \phi_y$  olur. (3.37)'daki denklemlerin integrali ile  $p = p_0 + 3\phi - 2x\phi_x - 2y\phi_y$  buluruz, burada  $p_0$  yüksek mertebe eşleme ile bulunabilecek olan sabit bir basınçtır. Bu hız potansiyeli ile çeyrek düzlem problemi (3.33)-(3.36)

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \\ x = 0 \text{ 'daki serbest yüzey şartları} \\ p_0 + 3\phi - 2y\phi_y &= \frac{4}{\pi}\xi - y, \\ \phi_x &= \frac{6}{\pi} + 2\xi - 2y\xi_y \\ y = 0 \text{ 'daki serbest yüzey şartları} \\ \phi_y &= 0 \\ \text{ve } (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \text{ iken bir eşleme şartı,} \\ \phi &\sim \frac{2}{\pi} \left\{ x \log(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + (\lambda + 1)x \right\} + o((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}), \\ \xi &\sim \frac{1}{\pi}(\log y + \lambda) + o(1), \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

olur.  $r \rightarrow \infty$  iken  $\phi$  sınırsız olduğundan, integral transformu ile bu sınır değer problemini çözmeden önce bazı düzenlemeler gereklidir. Orijinde standart polar koordinatları  $(r, \theta)$  kullanarak potansiyel ve serbest yüzeyi

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} + \frac{2}{\pi} \left\{ r \cos \theta \log r - \theta r \sin \theta + (\lambda + 1)r \cos \theta \right\}, \\ \xi &= \bar{\xi} + \frac{1}{\pi}(\log r + \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

şeklinde buluruz, böylece  $\bar{\phi}$  harmonik olur ve  $\bar{\phi}_\theta(r, 0) = 0$ . Ayrıca  $\theta = \frac{\pi}{2}$ 'deki serbest yüzey şartları (3.40) ve (3.39) kullanılarak

$$p_0 + 3\bar{\phi} - 2r\bar{\phi}_r = \frac{4}{\pi} \left\{ \bar{\xi} + \frac{1}{\pi}(\log r + \lambda) \right\}, \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{r}\bar{\phi}_\theta = -2\bar{\xi} + 2r\bar{\xi}_r, \quad (3.42)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $r \rightarrow \infty$  iken,  $\bar{\xi} = o(1)$  ve  $\bar{\phi} = o(r)$  olduğunu kolayca görebiliriz.  $\bar{\phi} = o(r)$  hala transform teknik uygulanabilmesi için yeterli değildir. Bir koordinat açılımı

$\bar{\phi} = A \log r + B + O(1/r)$ ,  $r \gg 1$  için, yapmalıyız. Bu açılımları probleme yerleştirerek  $\bar{\phi} = (4/3\pi^2) \log r + B + O(1/r)$  buluruz burada  $B$ ,  $p_0$  ve  $\lambda$ 'ya bağlı bir sabit, ve  $\bar{\xi} = O(1/r^2)$ . ( $B = (4/3\pi^2)\lambda + (8/9\pi^2) - (p_0/3)$ ) dir. Aşağıdaki ifade ile potansiyeli yeniden tanımlıyoruz ( $r \rightarrow \infty$  iken hem potansiyel hem de serbest yüzeyi sıfıra götürmek için):

$$\phi^* = \bar{\phi} - \frac{4}{6\pi^2} \log(1 + r^2) - B, \quad \xi^* = \bar{\xi}. \quad (3.43)$$

Bu durumda  $r \rightarrow \infty$  iken hız potansiyeli  $\phi^* = O(1/r)$  ve sınır değer problemini elde ederiz:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi^* &= -\frac{4}{6\pi^2} \Delta \log(1 + r^2) \\ \phi_\theta^* &= 0 \text{ ve } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ deki serbest yüzey koşullarına bağlı} \\ 3\phi^* - 2r\phi_r^* &= \frac{4}{\pi} \xi^* + F^*(r), \\ \frac{1}{r}\phi_\theta^* &= -2\xi^* + 2r\xi_r^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

burada  $F^*(r) = \frac{4}{3\pi^2} \left\{ 3 \log r - \frac{3}{2} \log(1 + r^2) + \frac{2r^2}{1 + r^2} - 2 \right\}$ .

Şimdi  $r \rightarrow 0$  iken  $\phi^* = O(1)$ ,  $\xi^* = O(\log r)$  ve  $r \rightarrow \infty$  iken  $\phi^* = O(1/r)$ ,  $\xi^* = O(1/r^2)$  olur ve Mellin transformu ile  $\phi^*$  ve  $\xi^*$

$$\mu[\phi^*(r, \theta)] = \hat{\phi}(p, \theta) = \int_0^\infty r^{p-1} \phi^*(r, \theta) dr, \quad (3.45)$$

$$\mu[\xi^*(r)] = \hat{\xi}(p) = \int_0^\infty r^{p-1} \xi^*(r) dr. \quad (3.46)$$

şeklinde tanımlanır.

$\Delta \phi^* = -\frac{4}{6\pi^2} \Delta \log(1 + r^2)$  denkleminin her iki tarafının transformunu alarak ve kısmi integral kullanarak

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + p^2 \right\} \hat{\phi}(p, \theta) = -\frac{2p}{3\pi \sin(\frac{\pi}{2}p)}. \quad (3.47)$$

elde ederiz. Bu adi diferansiyel denklemin genel çözümüm parametrelerin değişimi yöntemiyle

$$\hat{\phi}(p, \theta) = A(p) \sin(p\theta) + B(p) \cos(p\theta) - \frac{2}{3\pi p \sin(\frac{\pi}{2}p)} \quad (3.48)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde  $\theta = 0$ 'daki sınır şartının  $\phi_\theta^* = 0$  Mellin transformu  $\theta = 0$ 'da  $\hat{\phi}_\theta = 0$  olur. Bu sınır şartının genel çözüme (3.48) uygulanması ile  $A(p) = 0$  bulunur.  $\theta = \frac{\pi}{2}$ 'daki serbest yüzey şartlarının transformu

$$(3 + 2p)\hat{\phi}(p, \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} \hat{\xi}(p) - \frac{4(3 + 2p)}{6\pi p \sin(\frac{\pi}{2}p)}, \quad (3.49)$$

$$\hat{\phi}_\theta(p - 1, \frac{\pi}{2}) = -2(1 + p)\hat{\xi}(p), \quad (3.50)$$

sonucunu verir. Eğer bu bağıntılar arasında  $B(p)$  elimine edilirse  $B(p)$ 'nin

$$\frac{B(p)}{B(p-1)} = -\frac{2(p-1)}{\pi(3+2p)(1+p)}, \quad (3.51)$$

fark denklemini sağladığını buluruz. Bu fark denkleminin çözümü standart yöntemlerle (Mickens, 1990) kolayca

$$B(p) = \frac{b(p)(-1)^p \Gamma(p)}{\pi^p \Gamma(p + \frac{5}{2}) \Gamma(p+2)}, \quad (3.52)$$

şeklinde elde edilir, burada  $b(p)$ ,  $b(p)/b(p-1) = 1$ 'in çözümüdür ve henüz saptanmamıştır. Bu çözüm serbest yüzey yükseltisinin transformunu,

$$\hat{\xi}(p) = -\frac{b(p)(-1)^{p-1} \cos(\frac{\pi}{2}p)}{2p(p+1)\pi^{p-1}\Gamma(p + \frac{3}{2})}, \quad (3.53)$$

verir.  $b(p)$ 'yi saptamak ve transform çözümünü tamamlamak için öncelikle  $|p| \rightarrow \infty$  iken  $\hat{\xi}(p)$ 'nin davranışını incelemek ve  $b(p)$ 'yi Mellin ters integralinin yakınsaklığını sağlayacak şekilde seçmek gerekir. Büyük  $|p| = |\mu + i\tau|$  için  $\Gamma$  fonksiyonunun Stirling yaklaşımını kullanarak

$$\hat{\xi}(\mu + i\tau) = \begin{cases} O\left(\frac{b(\mu + i\tau)}{\tau^{\mu+3} e^{i\tau \log \tau}}\right), & \tau \rightarrow +\infty \\ O\left(\frac{b(\mu + i\tau)e^{-2\pi\tau}}{\tau^{\mu+3} e^{i\tau \log \tau}}\right), & \tau \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.54)$$

elde ederiz. Bu durumda  $\mu > -3$  ve

$$b(\mu + i\tau) = \begin{cases} O(1), & \tau \rightarrow +\infty \\ O(e^{2\pi\tau}), & \tau \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.55)$$

elde ederiz. Periyodu 1 olan ve bu özelliğe sahip fonksiyon

$$b(p) = \frac{C}{(-1)^p \sin \pi p} \quad (3.56)$$

dir ve burada  $C$  bir sabittir. Mellin ters formüllerini  $\hat{\xi}(p)$  ve  $\hat{\phi}(p, \theta)$ 'ye uygulayarak

$$\mu^{-1}[\hat{\xi}(p)] = \xi^*(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-p} \hat{\xi}(p) dp,$$

$$\mu^{-1}[\hat{\phi}(p, \theta)] = \phi^*(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-p} \hat{\phi}(p, \theta) dp$$

ve

$$\xi^*(r) = \frac{C\pi}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(1/\pi r)^p}{p(1+p) \sin(\frac{\pi}{2}p) \Gamma(p + \frac{3}{2})} dp \quad (3.57)$$



( $0 < c < 2$ ) için,

$$\phi^*(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \left\{ \frac{C \cos p\theta}{\pi^p \sin(\pi p) p(1+p)\Gamma(p + \frac{5}{2})} - \frac{2}{3\pi \sin(\frac{\pi}{2}p)} \right\} r^{-p} dp \quad (3.58)$$

( $0 < d < 1$ ) için buluruz.

Çizgi integrali, (3.58),  $Re(p) > 0$ 'da kontur integraline dönüşebilir ve residue teoreminin basit bir uygulaması

$$\xi^*(r) = -\frac{C}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/\pi r)^{2n}}{2n(2n+1)\Gamma(2n + \frac{3}{2})}, \quad (3.59)$$

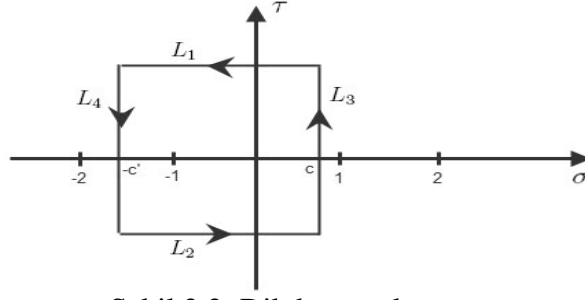
verir. Oran testi ile bu serinin tüm  $r \neq 0$  için yakınsak olduğunu görürüz. Aslında büyük  $r$  için seri asimtotiktir ve beklendiği gibi (3.59)'dan  $\xi^* = O(1/r^2)$  bulunur.  $r = 0$  için yukarıdaki seri ıraksar ve küçük  $r$  için değişik bir yöntemin gerekliliği  $\xi^*$  tablolarından kolaylıkla görülebilir (Tablo 3.1, 3.2 ve Şekil 3.4)

Tablo 3.1:  $r \rightarrow \infty$  iken küçük  $r$  için  $\xi^*$  Tablosu

$\xi^*$	$r = 10^{-5}$	$r = 10^{-3}$	$r = 10^{-2}$
$n = 1$	$1,43340153 \times 10^7$	1433,40153	14,3340153
$n = 2$	$-2,766360613 \times 10^{14}$	$-2,764927354 \times 10^6$	-262,3020603
$n = 3$	$3,73347886 \times 10^{21}$	$3,730714209 \times 10^9$	3471,177076
$n = 4$	$-3,461390054 \times 10^{28}$	$-3,457659713 \times 10^{12}$	-31142,72719

Tablo 3.2: Büyük  $r$  için  $r \rightarrow \infty$  iken  $\xi^*$  Tablosu

$\xi^*$	$r = 10^{-1}$	$r = 0,5$	$r = 1$	$r = 2$
$n = 1$	0,143340153	0,005733606121	0,00143340153	0,0003583503826
$n = 2$	0,1156765455	0,005689344349	0,00143063517	0,000358177485
$n = 3$	0,1194100246	0,005689583292	0,001430638903	0,0003581775434
$n = 4$	0,1190638856	0,005689582406	0,0014306389	0,0003581775434
$n = 5$	0,1190868988	0,005689582408	0,0014306389	
$n = 6$	0,119085755	0,005689582408		
$n = 7$	0,119085799			
$n = 8$	0,1190857977			
$n = 9$	0,1190857977			



Şekil 3.3: Dikdörtgen kontur.

Sol  $p$  düzlemine bir yarım çember ilavesiyle çizgi integralini kontur integraline dönüştürmeyeceğimizden (gama fonksiyonundaki artıştan dolayı), Şekil 3.3'deki gibi dikdörtgen bir konturu dikkate alıyoruz. Doğru parçaları  $L_1$  ve  $L_2$ 'nin katkıları, (3.54) tahmininden ve ML lemanın kullanımıyla, keyfi bir şekilde küçük kalabilir. Dolayısıyla,

$$\xi^*(r) = \frac{C\pi}{4} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \frac{(1/\pi r)^p}{p(p+1) \sin(\frac{\pi}{2}p) \Gamma(p + \frac{3}{2})} dp + Res(p = 0, -1) \right\}$$

elde ederiz, burada  $1 < c' < 2$ . Bu integral yukarıdan

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \frac{(1/\pi r)^p}{p(p+1) \sin(\frac{\pi}{2}p) \Gamma(p + \frac{3}{2})} dp \right| \leq D(\pi r)^{c'} \quad (3.60)$$

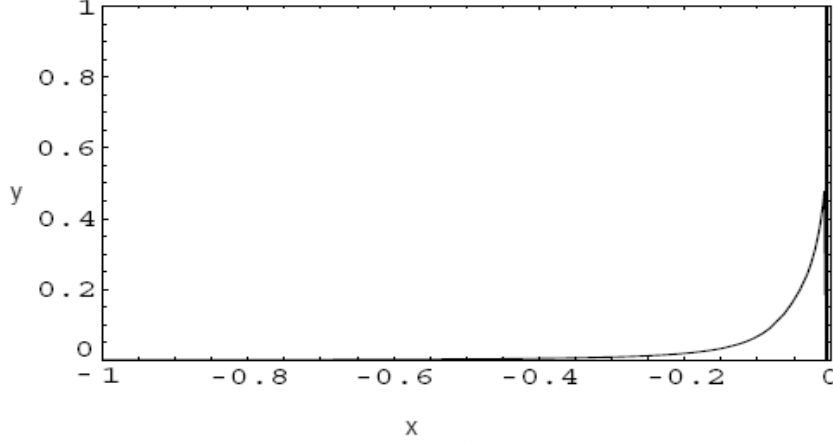
terimiyle sınırlıdır, burada  $D$  bir  $O(1)$  sabitidir. Çift kutupta ve  $p = 0, -1$ 'deki basit kutuplardaki rezidüleri hesaplayarak,  $r \rightarrow 0$  iken geçerli, aşağıdaki asimtotik açılıma,

$$\xi^*(r) = \frac{C\pi}{4} \left\{ \frac{2}{\pi \Gamma(\frac{3}{2})} \left( \log\left(\frac{1}{\pi r}\right) - 1 - \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) \right\} + o(r), \quad (3.61)$$

ulaşırız. Tablo 3.3'den küçük  $r$  için  $\xi^*$  ifadesinin geçerli olduğunu görebiliriz.

Tablo 3.3: Tablo  $\xi^*$ ,  $r \rightarrow 0$  iken

	$r = 10^{-2}$	$r = 10^{-3}$	$r = 10^{-4}$	$r = 10^{-10}$	$r = 10^{-100}$
$\xi^*$	0, 7794213341	1, 505288349	2, 23751709	6, 635052144	72, 59925604



Şekil 3.4: Fonksiyon  $\xi^*$ ,  $r \rightarrow \infty$  iken

Fiziksel serbest yüzey yükseltisi  $\xi_2 = \xi^* + (1/\pi)(\log r + \lambda)$  olduğundan,  $C = 1/\sqrt{\pi}$  seçimiyle logaritmik terim yok edilebilir. Böylece küçük  $r$  için serbest yüzey  $\xi^*(r)$  formu için

$$\xi_2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \log(-\log t) + \log\left(\frac{1}{4}\right) - 1 - \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{\pi^2 r}{4} \right\} + o(r), \quad (3.62)$$

ve büyük  $r$  için

$$\xi_2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \log r + \log(-\log t) + \log\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/\pi r)^{2n}}{2n(2n+1)\Gamma(2n+\frac{3}{2})}. \quad (3.63)$$

buluruz. Bu durumda çözüm tekillik içermemektedir, böylece yalnızca iki asimtotik bölge gereklidir ve temel mertbe problemi çözümündeki tercihimiz doğrulanmaktadır. Temel mertbe serbest yüzeyinin düzeltilmesi,  $\xi_2(Y)$

$$\xi_2(Y) = \frac{1}{\pi}(\log Y + \lambda) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(1/\pi Y)^p}{p(1+p)\sin(\frac{\pi}{2}p)\Gamma(p+\frac{3}{2})} dp \quad (3.64)$$

şeklinde yazılabilir,  $0 < c < 2$ . (3.64)'deki integral  $Y \rightarrow \infty$  iken  $O(1/Y^2)$  mertebesindedir böylece Tablo 3.4'den görüleceği üzere  $Y \rightarrow \infty$  iken  $\xi_2(Y)$  dış çözümle eşleşir.

$Y \rightarrow 0$  iken

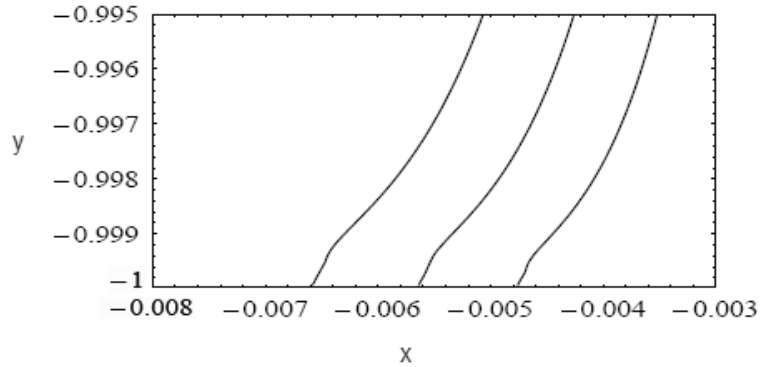
$$\xi_2(Y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \log(-\log t) + \log\left(\frac{1}{4}\right) - 1 - \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{\pi^2 Y}{4} \right\} + o(Y), \quad (3.65)$$

olduğunu görebiliriz.

$\xi$ 'nin iç çözümlerini kullanarak, Şekil 3.5 çizilmiştir. Bu şekilde  $Y \rightarrow \infty$  iken iç çözümün  $(-0.995, -0.99997)$  değerleri arası ve  $Y \rightarrow 0$  iken  $(-0.99997, -1)$  değerleri arası sırasıyla  $t = 0.05366531459995$ ,  $t = 0.0491934955049954$ ,  $t = 0.0447213595499958$  için hesaplanmıştır.

Tablo 3.4: Kesişim noktası civarında  $\xi(y, t)$  çözümlerinin kıyaslanması

	Dış Çözüm	İç Çözüm
$y = -0.4$	-0.000343406	-0.000383189
$y = -0.6$	-0.000572539	-0.00058969
$y = -0.8$	-0.000938495	-0.000942706
$y = -0.9$	-0.00129468	-0.00129572
$y = -0.99$	-0.00246841	-0.00246781
$y = -0.999$	-0.00364112	-0.00358329
$y = -0.9999$	-0.00481382	-0.003893
$y = -0.99991$	-0,00486748	-0.0038951
$y = -0.99992$	-0.00492746	-0.0038974
$y = -0.99993$	-0.00499547	-0.0039002
$y = -0.99994$	-0.00507398	-0.00390249
$y = -0.99995$	-0.00516683	-0.00390493
$y = -0.99996$	-0.00528048	-0.00390739
$y = -0.99997$	-0.00542699	+0.8004156
$y = -0.99998$	-0.0056335	$1.06512 \times 10^9$



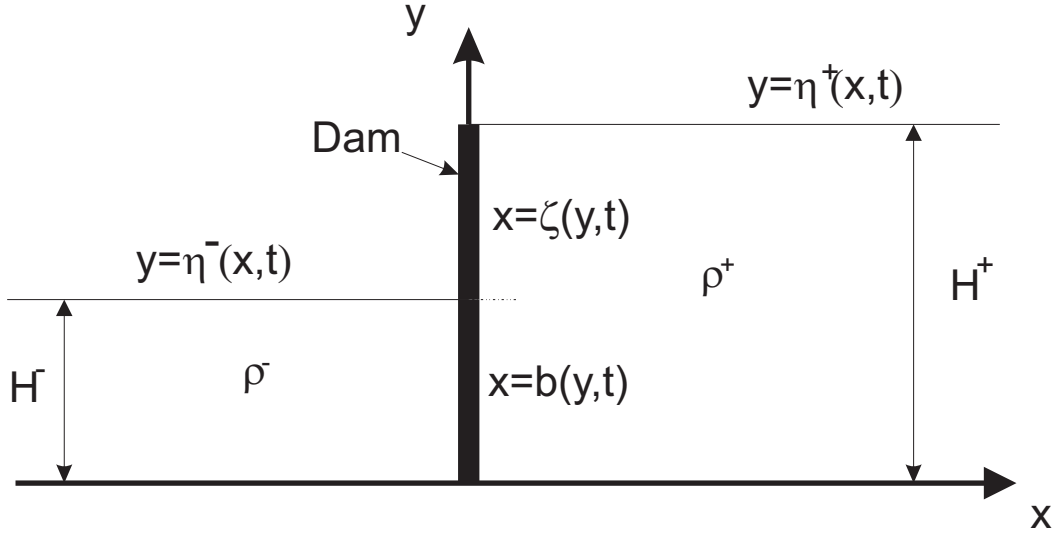
Şekil 3.5: İç Bölgede Fonksiyon  $\xi$

## Bölüm 4

# Baraj Yıkımı Akışı, Islak Taban Durumu: Fourier Serileri ile Dış Çözüm

### 4.1 Giriş

Düşey bir duvar aniden kaldırıldığında, her iki tarafta farklı düzeylerdeki akışkanların yerçekimi etkisiyle oluşan düzlemsel zamana bağlı hareketi incelendi. Problem Euler koordinatlarında çalışıldı. Başlangıçta sıvı  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$  bölgesini işgal etmektedir, burada  $\Omega^+ = \{x' > 0, 0 < y' < H^+\}$  ve  $\Omega^- = \{x' < 0, 0 < y' < H^-\}$  ve sıvı hareketsizdir (bkz Şek. 4.1). Üs simgesi ( $'$ ) boyutlu değişkenler içindir,  $H^+$  ve  $H^-$ , sırasıyla  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$  bölgelerindeki sıvı derinliğidir. Sınırın  $\Omega_+$  içindeki  $FS^+ = \{x' > 0, y' = H^+\}$  kısmı,  $\Omega_-$  içindeki  $FS^- = \{x' < 0, y' = H^-\}$  kısmı ve ara yüzeydeki  $FS^v = \{x' = 0, H^- < y' < H^+\}$  kısmı sıvının serbest yüzeyleridir. Yan duvar,  $x' = 0, 0 < y' < H^+$ , barajı temsil etmektedir. Aşağıdaki yatay sınır,  $y' = 0$ , katı tabanı göstermektedir. Bundan sonra üstsimge  $+$ ,  $\Omega^+$ 'daki değişkenler için ve üstsimge  $-$ ,



Şekil 4.1: Başlangıç anı,  $t' = 0$ 'daki akış bölgesi

$\Omega^-$ 'daki değişkenler için kullanılacaktır. Başlangıçta sıvı içerisindeki basınç dağılımı hidrostatiktir,  $x' > 0$  için  $p^{+'}(x', y', 0) = \rho^+ g(H^+ - y')$  ve  $x' < 0$  için  $p^{-'}(x', y', 0) = \rho^- g(H^- - y')$  burada  $\rho^\pm$  sıvının yoğunluğu ve  $g$  yerçekimi ivmesidir. Başlangıç anında,  $t' = 0$ , duvar  $x' = 0, 0 < y' < H^+$  aniden kaldırılıyor ve yerçekimi etkisinde akış başlıyor. Sıvı ideal ve sıkıştırıla-

maz varsayılmaktadır. Akış potansiyel ve iki boyutludur. Sıvının akışını ve serbest su yüzeyinin şeklini ilk anlar için bulacağız.

## 4.2 Problemin İfadesi

Baraj yıkımının yol açtığı yerçekimi etkisindeki akış, boyutsuz değişkenler cinsinden hız potansiyeli  $\varphi^\pm(x, y, t)$  ile tanımlanır. Boyutsuz değişkenler

$$x' = H^+x, \quad y' = H^+y, \quad t' = Tt, \quad (4.1)$$

$$\varphi'^{\pm} = gH^+T\varphi^\pm, \quad p'^{\pm} = \rho^\pm gH^+p^\pm, \quad T = \varepsilon^{1/2}\sqrt{H^+/g},$$

şeklindedir, buradaki küçük boyutsuz parametre  $\varepsilon$  akışın ilk anlarıyla ilgilendiğimizi belirtmek için kullanılmıştır.

Boyutsuz potansiyel  $\varphi^\pm(x, y, t)$  aşağıdaki denklemleri sağlar

$$\Delta\varphi^\pm = 0 \quad (\Omega^\pm(t)'de), \quad (4.2)$$

$$p^+ = \varphi_t^+ + \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\varphi^+|^2 + \varepsilon\eta^+ = 0 \quad (\text{FS}^+'de : y = \varepsilon\eta^+ + 1), \quad (4.3)$$

$$\varphi_y^+ = \varepsilon\eta_x^+\varphi_x^+ + \eta_t^+ \quad (y = \varepsilon\eta^+(x, t) + 1, x > 0), \quad (4.4)$$

$$p^- = \varphi_t^- + \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\varphi^-|^2 + \varepsilon\eta^- = 0 \quad (\text{FS}^-'de : y = \varepsilon\eta^- + \delta), \quad (4.5)$$

$$\varphi_y^- = \varepsilon\eta_x^-\varphi_x^- + \eta_t^- \quad (y = \varepsilon\eta^-(x, t) + \delta, x < 0), \quad (4.6)$$

$$p^+ = \varphi_t^+ + \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\varphi^+|^2 + y - 1 = 0 \quad (\text{FS}^v'de : x = \varepsilon\zeta(y, t)), \quad (4.7)$$

$$\varphi_x^+ = \varepsilon\zeta_y\varphi_y^+ + \zeta_t \quad (x = \varepsilon\zeta(y, t), \varepsilon\eta^-(0, t) < y < \varepsilon\eta^+(0, t)), \quad (4.8)$$

$$p^+ = p^- : \varphi_t^+ + \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\varphi^+|^2 + y - 1 = \gamma(\varphi_t^- + \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\varphi^-|^2) - \gamma\delta + \gamma y \quad (x = \varepsilon b(y, t)'de), \quad (4.9)$$

$$\varphi_x^+ - \varepsilon b_y\varphi_y^+ = \varphi_x^- - \varepsilon b_y\varphi_y^- \quad (x = \varepsilon b(y, t), 0 < y < \varepsilon\eta^-(0, t)), \quad (4.10)$$

$$\varphi_y^\pm = 0 \quad (y = 0), \quad (4.11)$$

$$p^+ = -(\varphi_t^+ + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\varphi^+|^2) + 1 - y \quad (\Omega^+(t)'de), \quad (4.12a)$$

$$p^- = -(\varphi_t^- + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\varphi^-|^2) + \delta - y \quad (\Omega^-(t)'de), \quad (4.12b)$$

$$\varphi^\pm(x, y, 0) = 0, \quad \eta^\pm(x, 0) = 0, \quad \zeta(y, 0) = 0, \quad b(y, 0) = 0 \quad (t = 0), \quad (4.13)$$

$$\varphi^\pm \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow^\pm \infty), \quad (4.14)$$

burada  $\delta = H^-/H^+$ ,  $\gamma = \rho^-/\rho^+$  dir. Ayrıca  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$  akış bölgesidir ve  $FS(t) = FS^+ \cup FS^- \cup FS^v$  bu bölgenin serbest yüzeyidir, bu yüzey zaman ile değişmekte ve çözümün parçası olarak elde edilmelidir. Kinematik şart (4.4), şekli  $y = \varepsilon\eta^+(x, t)$ ,  $x > 0$  denklemiyle verilen serbest yüzeyin üst kısmında konmuştur. Kinematik şart (4.8), serbest yüzeyin başlangıçta dikey olan kısmında verilmiştir. Serbest yüzeyin bu kısmının şekli  $x = \varepsilon\zeta(y, t)$  denklemiyle tanımlıdır. Serbest yüzey deformasyonu  $\varepsilon H^+$  dir. Serbest yüzeyin tüm üç kısmında dinamik sınır şartlar (4.3), (4.5) ve (4.7) sağlanmalıdır. Denklem (4.2)'deki akış bölgesi, serbest su yüzeyi FS(t) ve üzerinde (4.11) şartının sağlandığı katı taban  $y = 0$  tarafından sınırlanır.



### 4.3.1 Fourier Serileri ile Çözüm

Fourier serileri ile, temel mertebenin çözümü,

$$\phi_0^+ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(2n+1)x\pi/2} \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} y \right], \quad (4.24)$$

$$\phi_0^- = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{(2n+1)x\pi/(2\delta)} \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2\delta} y \right], \quad (4.25)$$

şeklindedir, burada

$$c_n/2 = \gamma \int_0^{\delta} \phi_0^-(y) \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} y \right] dy + \frac{4t}{(2n+1)^2\pi^2} \left[ \gamma \cos \left( \frac{(2n+1)\pi\delta}{2} \right) + 1 - \gamma \right], \quad (4.26)$$

$$d_n/2 = \frac{1}{\delta} \int \phi_0^- \cos \left( \frac{(2n+1)\pi}{2\delta} y \right) dy. \quad (4.27)$$

Denklem (4.20) ve (4.21)'deki birinci şartları uygulayarak

$$c_n/2 - \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} d_m = f_n(t), \quad (4.28)$$

elde ederiz, burada

$$f_n(t) = \frac{4t}{(2n+1)^2\pi^2} \left[ 1 - \gamma + \gamma \cos \left( \frac{2n+1}{2} \pi \delta \right) \right], \quad (4.29)$$

$$\alpha_{nm} = \frac{2(-1)^m \delta}{\pi} \cos \left( \frac{2n+1}{2} \pi \delta \right) \left[ \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - (2n+1)^2 \delta^2} \right]. \quad (4.30)$$

Denklem (4.21)'in ikinci şartından,

$$- \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{2n+1}{2} \alpha_{nm} = d_m \frac{2m+1}{4}, \quad (4.31)$$

buluruz. Doğrusal cebirsel denklemler (4.28) ve (4.31)'i kullanarak,  $c_\ell$  katsayıları için sonsuz sistem elde ederiz,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ 2\gamma(2\ell+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\ell m} \alpha_{nm}}{2m+1} + \frac{1}{2} \delta_{\ell n} \right] c_\ell = f_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

## 4.4 Yakınsaklık Testleri

Katsayılar  $c_n$  and  $d_n$ 'i elde etmek için, sonsuz doğrusal sistem (4.32) kesilmelidir,

$$\sum_{\ell=0}^M \left[ 2\gamma(2\ell+1) \sum_{m=0}^M \frac{\alpha_{\ell m} \alpha_{nm}}{2m+1} + \frac{1}{2} \delta_{\ell n} \right] c_\ell = f_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (4.33)$$



Tablo 4.1: Yakınsaklık;  $\delta = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $t = 0.1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0.5$  parametreleri için

M	$c_0$	$\varphi_{0x}^+$	$\varphi_{0x}^-$
20	$4.772630 \times 10^{-2}$	-0.212912	0.0
50	$4.776826 \times 10^{-2}$	-0.293581	0.0
100	$4.777899 \times 10^{-2}$	-0.372695	0.0
200	$4.778326 \times 10^{-2}$	-0.471891	0.0
400	$4.778496 \times 10^{-2}$	-0.596440	0.0
600	$4.778543 \times 10^{-2}$	-0.683640	0.0
900	$4.778570 \times 10^{-2}$	-0.783352	0.0
1500	$4.778589 \times 10^{-2}$	-0.929633	0.0

Tablo 4.2: Yakınsaklık;  $\delta = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $t = 0.1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0.0$  parametreleri için

M	$\varphi_{0x}^+$	$\varphi_{0x}^-$
20	-0.0393144	-0.0372826
50	-0.0294001	-0.0313033
100	-0.0315838	-0.0328036
200	-0.0312152	-0.0319912
400	-0.0310135	-0.0315050
600	-0.0309423	-0.0313181
900	-0.0308935	-0.0311808
1500	-0.0308540	-0.0310586

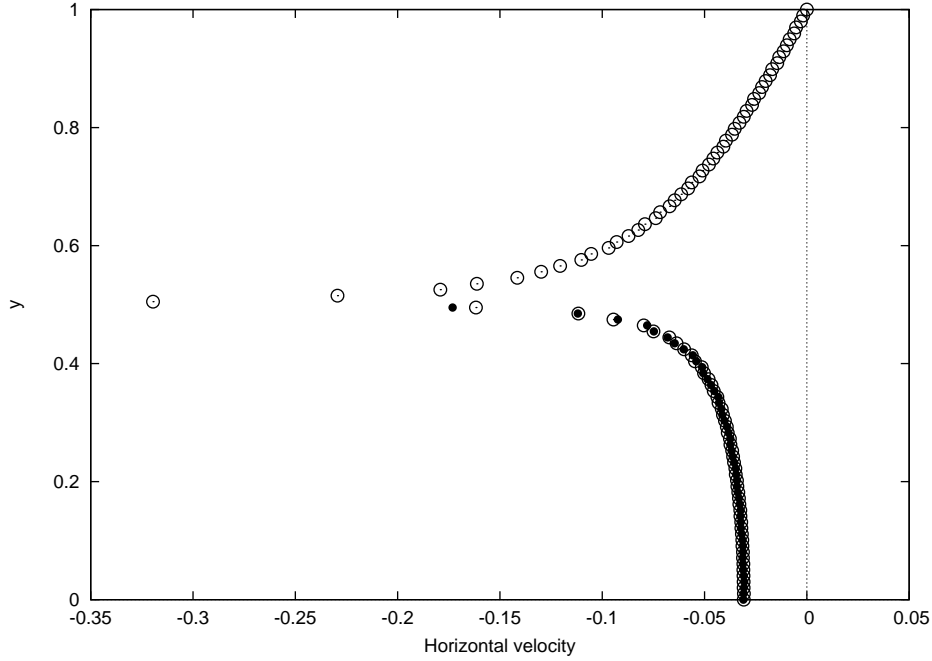
Tablo 4.1'den  $(0, 0.5)$  noktasında yatay hızın,  $\varphi_{0x}^+$ , ıraksadığını görüyoruz, yakınsama olsa bile bunun çok yavaş olduğunu ve pratik olarak bir önemi olmadığını gözlemliyoruz, ayrıca  $\varphi_{0x}^+$  ve  $\varphi_{0x}^-$  arasında tam bir uyumsuzluk görülmektedir. Yani,  $(0, 0.5)$  noktasının kuvvetli bir tekillik olduğunu söyleyebiliriz.

Tablo 4.2'de  $(0, 0)$  noktasında yatay hızların yavaş yakınsadığını görüyoruz. Bununla beraber, yakınsama bir önceki kadar yavaş değil. Yani,  $(0, 0)$  noktası muhtemelen tekil ama  $(0, 0.5)$  noktası kadar kuvvetli bir tekillik yok.

İki tekil nokta dışında  $x = 0$  doğrusu üzerindeki diğer tüm noktalarda yakınsama problemi yoktur (Bkz Tablo 4.3).

Tablo 4.3: Yakınsaklık;  $\delta = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $t = 0.1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0.25$  parametreleri için

M	$\varphi_{0x}^+$	$\varphi_{0x}^-$
20	-0.0323011	-0.0321794
50	-0.0370979	-0.0371265
100	-0.0351553	-0.0351460
200	-0.0372163	-0.0372133
400	-0.0368952	-0.0368942
600	-0.0367720	-0.0367715
900	-0.0362145	-0.0362142



Şekil 4.3: Yatay hız dağılımı,  $x = 0$  ve  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 1$  için. Tam dolu noktalar  $\varphi_{0x}^-$ 'i ve boş noktalar  $\varphi_{0x}^+$ 'i göstermektedir. Hesaplarda 1500 terim kullanılmıştır.

$x = 0$  doğrusu için hız profili Tablo 4.4 ve Şekil 4.3'de görülebilir.

## 4.5 Limit Durumları

Çözümün bazı ilginç limit durumları vardır: 1) barajın her iki tarafında eşit seviyede sıvı var; 2) sol tarafta çok az derinlikte sıvı var; 3) soldaki akışkanın yoğunluğu çok az; 4) soldaki akışkanın yoğunluğu çok fazla.

1. Birinci limit durumu için,  $\delta = 1$ ,  $\alpha_{lm} = 0$ ,  $c_n = \frac{8t}{(2n+1)^2\pi^2}(1-\gamma)$  ve  $d_n = 0$  elde ederiz. Bu durum,  $(1-\gamma)$  çarpanı dışında kuru taban durumuna benzemektedir. Bu durumda eşleme şartlarının hatalı olduğunu, çözümün doğru olmadığını farkediyoruz, problem tekrardan formüle edilmelidir.

2. İkinci durum kuru tabana karşı gelmektedir ve bu durumu tam olarak elde ederiz:  $\delta = 0$ ,  
 $\alpha_{nm} = 0$ ,  $c_n = \frac{8t}{(2n+1)^2\pi^2}$  and  $d_n = 0$ .

3. Üçüncü durum,  $\gamma = 0$ , ikinci duruma (kuru taban) indirgenmektedir.

4. Nihai durum katı adım (rigid step) durumudur, bu durumda çözüm aşikâr değildir,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\ell m} \alpha_{nm}}{2m+1} \right] c_{\ell} = \frac{2t}{(2n+1)^2\pi^2} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \pi \delta \right) - 1 \right]. \quad (4.34)$$

Fakat bu durumda, yatay hız gerçekçi olamayacak kadar yüksek değerlerdedir. Bu da problemin tekrar formüle edilmesi gerektiğini gösterir.

Tablo 4.4: Yatay hız dağılımı,  $x = 0$ 'da. Hesaplarda 1500 terim kullanılmıştır. Parametreler Şekil 4.3'dekiyle aynıdır.

$y$	$\varphi_{0x}^+$	$\varphi_{0x}^-$
0.0	-0.0308540	-0.0310586
0.010	-0.0307838	-0.0308917
0.020	-0.0308731	-0.0307820
0.030	-0.0308673	-0.0306626
0.040	-0.0309341	-0.0308092
0.050	-0.0310270	-0.0311010
0.101	-0.0315707	-0.0314102
0.202	-0.0341310	-0.0341591
0.303	-0.0400398	-0.0402445
0.404	-0.0547022	-0.0540298
0.455	-0.0749857	-0.0747775
0.465	-0.0797433	-0.0780497
0.475	-0.0945080	-0.0923880
0.485	-0.1116931	-0.1119303
0.495	-0.1617356	-0.1731355
0.505	-0.3195829	
0.515	-0.2293923	
0.525	-0.1791373	
0.535	-0.1612510	
0.545	-0.1415428	
0.555	-0.1298397	
0.606	-0.0929410	
0.707	-0.0562392	
0.808	-0.0329268	
0.909	-0.0144622	
0.950	-0.0084304	
0.960	-0.0061704	
0.970	-0.0053007	
0.980	-0.0029207	
0.990	-0.0018270	
1.000	-0.0000000	

## Bölüm 5

# Sınır Eleman Yöntemi (Boundary Element Method)

### 5.1 Problemin Formülasyonu

Şekil 5.1’de çizilen problemi düşünelim. Farklı yoğunluğa sahip,  $\rho^-$ ,  $\rho^+$  iki akışkanı sol ve sağ bölgelere ayıran bir baraj vardır ve sıvıların serbest su yüzeyi yükseklikleri de farklıdır ve  $h^-$  ve  $h^+$  olarak gösterilmişlerdir. Kolaylık açısından, iki bölgenin sonlu olduğu varsayılmıştır ve kenarlarda dikey duvarlar tarafından sınırlanmıştır.

İki akışkanı ayıran baraj yıkıldıktan hemen sonraki başlangıç anlarıyla ilgileneceğiz. Buradaki çalışma ideal ve sıkıştırılmaz akışkan varsayımı altında yapılmıştır, ve çözüm hız potansiyeli ile tanımlanabilir;  $\varphi^-$  ve  $\varphi^+$ . Hız potansiyelleri iki bölgede Laplace denklemini sağlar.

Akış yerçekimi etkisinde hareketlenirken, üniform olarak ivmelenecek, dolayısıyla hız potansiyellerini zamana göre seriye açmak mantıklıdır:

$$\varphi^-(x, y, t) = \varphi_0^-(x, y)t + \varphi_1^-(x, y)t^2 + \dots \quad (5.1)$$

$$\varphi^+(x, y, t) = \varphi_0^+(x, y)t + \varphi_1^+(x, y)t^2 + \dots \quad (5.2)$$

Bu şekilde, potansiyel fonksiyonları  $\varphi_k^-$ ,  $\varphi_k^+$  yalnızca mekân değişkenlerine bağlıdır, çünkü zaman bağımlılığı zaten belirtilmiştir. Yukarıdaki açılımların ana merteye terimlerinin sınır değer problemi aşağıdaki gibidir.

Tabanda ve iki dikey duvarda, geçirmezlik şartına göre, normal yöndeki hız sıfırdır. Bu şartı tüm zamanlarda sağlayabilmek için, sınır boyunca  $\partial\varphi_0^-/\partial n^- = 0$  ve  $\partial\varphi_0^+/\partial n^+ = 0$  şartları sağlanmalıdır.

Değişken Bernoulli denkleminde, sol bölge için,

$$\rho^- \frac{\partial\varphi^-}{\partial t} + p^- + \rho^- g(y - h^-) + \rho^- \frac{|\mathbf{u}^-|^2}{2} = 0 \quad ,$$

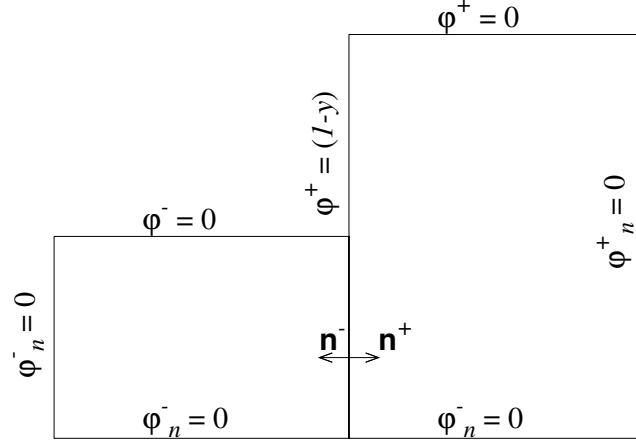
buluruz. Yukarıdaki denkleme (5.1) açılımını yerleştirerek ve yalnızca ana merteye terimleri tutarak,

$$\rho^- \varphi_0^- + p^- + \rho^- g(y - h^-) = 0 \quad (5.3)$$

elde ederiz, burada serbest yüzeyde  $p^- = 0$  dır ve

$$\varphi_0^- = -\rho^- g(y - h^-) \quad . \quad (5.4)$$

Benzer şekilde, sağ bölgenin yatay ve dikey serbest yüzeyleri için



Şekil 5.1: Bölgelerin geometrisi ve ana merteye problemin sınır eleman yöntemindeki sınır şartları.

$$\varphi_0^+ = -\varrho^+ g(y - h^+) \quad , \quad (5.5)$$

elde ederiz. İki bölge için sınır şartlarını tamamlamak için, ortak arayüzde eşleme şartlarını eklemeliyiz. Süreklilikten, arayüze dik hızların limit değerleri sol ve sağ bölgeler için aynı olmalıdır. Normal her iki bölgenin içine doğru yönlendiğinden, normal hızların arayüzeyde sürekliliği

$$\frac{\partial \varphi_0^-}{\partial n^-} = -\frac{\partial \varphi_0^+}{\partial n^+} \quad (5.6)$$

şeklini alır. Arayüzey boyunca basınç sürekli olmalıdır. Denklem (5.3)'dan, ve sağ bölge için karşı gelen denklemden,  $p^- = p^+$  şartı

$$\varrho^- \varphi_0^- + \varrho^- g(y - h^-) = \varrho^+ \varphi_0^+ + \varrho^+ g(y - h^+)$$

ifadesini ima eder veya

$$\varphi_0^+ - \gamma \varphi_0^- = \gamma g(y - h^-) - g(y - h^+) \quad (5.7)$$

olur. Takip eden bölümlerde ana merteye problemin çözümü sayısal olarak çıkartılacaktır. Denklemleri boyutsuz formda yazmak kolaylık sağlayacaktır ve bu amaç için  $\delta = h^-/h^+$  parametresi kullanılacaktır. Denklem (5.4)'ye göre,  $\varphi_0$ ,  $gh^-$  ve  $gh^+$  kullanılarak boyutsuz yapılabilir. Bu durumda serbest yüzeydeki şartlar

$$\varphi^- = -(y - \delta) \quad \varphi^+ = -(y - 1) \quad (5.8)$$

şeklini alır, arayüzdeki basıncın sürekliliği ise

$$\varphi^+ - \gamma \varphi^- = \gamma(y - \delta) - (y - 1) \quad (5.9)$$

şeklini alır. Alt indis "0" yazılmamıştır. Katı yüzeylerdeki sınır şartlarının formunda belirgin bir değişiklik yoktur,

$$\frac{\partial \varphi^-}{\partial n^-} = 0 \quad \frac{\partial \varphi^+}{\partial n^+} = 0 \quad (5.10)$$

ayrıca arayüzdeki normal hızın sürekliliği şartında da bir değişiklik yoktur,

$$\frac{\partial \varphi^-}{\partial n^-} = -\frac{\partial \varphi^+}{\partial n^+} \quad (5.11)$$

## 5.2 Sınır Eleman Yöntemiyle Sayısal Çözüm

Sınır değer probleminin sayısal çözümü sınır eleman yaklaşımıyla çıkartılmıştır. Burada bazı temel denklemler birleşik bir notasyon sağlamak amacıyla tekrar çıkartılmıştır. Bununla beraber, tam ve formal ifadeler için klasik kitaplara başvurmak en iyisidir (Kellogg, 1953).

Varsayalım ki, kapalı bir  $\Omega$  bölgesinde hız potansiyelini  $\varphi$  bulmak istiyoruz. Sınır boyunca  $\partial\Omega$  hız potansiyeli  $\varphi$  veya onun normal türevi verilmiş olsun. Fonksiyon  $\varphi$  Laplace denklemini sağlar

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.12)$$

Bunun yanında

$$\nabla^2G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

denklemini sınırsız bir bölgede sağlayan başka bir fonksiyon düşünelim. Fonksiyon  $G(\mathbf{x})$  iki boyutta Laplace operatörü için serbest uzay Green fonksiyonudur (Tikhonov, 1963).

Denklem (5.12) ve (5.13) kullanılarak, konvolüsyon integrali

$$\int_{\Omega} [G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\nabla_y^2\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y})\nabla_y^2G(\mathbf{x} - \mathbf{y})] dS(\mathbf{y}) \quad (5.14)$$

şeklinde yazılır. Diverjans teoremi yardımıyla yukarıdaki integral sınır üzerinde  $\partial\Omega$  bir doğru integraline dönüşür. Denklem (5.14)'deki integral

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (G\nabla\varphi) - \nabla G\nabla\varphi - \nabla \cdot (\varphi\nabla G) + \nabla G\nabla\varphi] dS(\mathbf{y})$$

şeklinde yazılır. Sembol  $\mathbf{n}$  akışkan içine doğru yönelmiş sınıra normalini gösterir. Böylece yüzey integrali sınır boyunca doğru integraline dönüştürülür:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot [G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\nabla\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y})\nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y})] dl(\mathbf{y}) \quad (5.15)$$

Denklem (5.14)'de ilk terimin katkısı sıfırdır çünkü  $\nabla^2\varphi = 0$ ,  $\Omega$  içinde her yerde, oysa  $\mathbf{x} \in \Omega$ 'daki bir nokta için, tanım (5.13)'a göre, konvolüsyon integralin ikinci kısmı  $-\varphi(\mathbf{x})$  verir. Böylece, denklemler (5.14) ve (5.15) eşitlenerek, akışkan içindeki bir nokta için hız potansiyeli

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left[ \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] dl(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.16)$$

şeklinde ifade edilir. Hız potansiyeli veya normal türevi sınırda bilindiği takdirde, yukarıdaki denklem bize bölge içindeki herhangi bir noktadaki hız potansiyelini verir. Bu verilerden (hız potansiyeli veya normal türevi) yalnızca biri bilindiğine göre, diğerinin bulunması gerekir. Bu amaç için,  $\mathbf{x} \rightarrow \partial\Omega$  limitinde sınır integral temsili alınır. Bu durumda denklem

$$\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left[ \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] dl(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (5.17)$$

şeklini alır. Sınır boyunca fonksiyonlar her yerde bilinmediğine göre, denklem (5.17) karışık birinci ve ikinci cins bir integral denklemdir.

Sayısal olarak, integral denklemin çözümü sınırın düz doğru parçalarına ayrılması ve her parçada hız potansiyeli ve normal türevin sabit olduğu varsayımına dayanır. Böylece ayrık formda denklem (5.17)

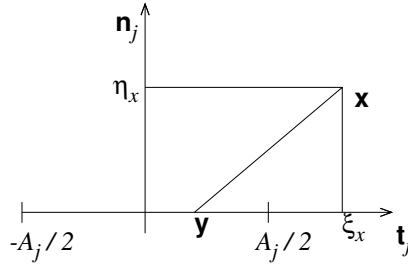
$$\frac{1}{2}\varphi_i - \sum_{j \in N_N} \varphi_j d_{ij} + \sum_{j \in N_D} \varphi_{n,j} g_{ij} = \sum_{j \in N_D} \varphi_j d_{ij} - \sum_{j \in N_N} \varphi_{n,j} g_{ij} \quad (5.18)$$

şeklini alır, burada  $N_N$  ve  $N_D$  sırasıyla Neumann ve Dirichlet şartlarının uygulanacağı panel-lerin indislerinin kümesini gösterir. Denklem (5.18) her sınır panelinin orta noktasında koloke edilir, böylece  $N_N + N_D$  denklemlik bir sistem bulunur. Sol taraftaki ilk terim sağa alınır, eğer  $i \in N_D$ 'de hız potansiyeli varsa.

Denklem (5.18)'de,  $g_{ij}$  and  $d_{ij}$  panel  $i$ 'nin orta noktasında panel  $j$ 'nin etki katsayılarını göstermektedir:

$$g_{ij} = \int_{P_j} G(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) \, d l \quad d_{ij} = \int_{P_j} \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) \, d l.$$

İntegralleri hesaplamak için, panel  $j$ 'ye bağlı yerel bir eksen takımı kullanılması kolaylık sağlar (Şekil 5.2). Bu koordinat takımında  $x_i = (\xi_x, \eta_x)$  ve  $\mathbf{y} = (\xi, 0)$ , burada  $\xi$ ,  $-A_j/2$ 'dan  $A_j/2$ 'ta değişir,  $A_j$  ise panelin boyunu gösterir.



Şekil 5.2: Etki katsayılarının hesabı için kullanılan yerel eksen takımı.

Yerel değişkenleri kullanarak,

$$G(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \log [(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2]$$

ve böylece  $g_{ij}$  için

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-A_j/2}^{A_j/2} \log [(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2] \, d \xi \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-A_j/2}^{A_j/2} \log [(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2] \, d (\xi_x - \xi) \end{aligned}$$

elde ederiz. Kısmi integrasyon

$$\begin{aligned} g_{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \log [(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2] (\xi_x - \xi) \Big|_{-A_j/2}^{A_j/2} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-A_j/2}^{A_j/2} \frac{2(\xi_x - \xi)}{[(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2]} \, d (\xi_x - \xi) \end{aligned}$$

verir ve

$$\begin{aligned} g_{ij} &= -\frac{1}{4\pi} [\log (\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2] (\xi_x - \xi) \Big|_{-A_j/2}^{A_j/2} + \frac{1}{2\pi} (\xi_x - \xi) \Big|_{-A_j/2}^{A_j/2} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-A_j/2}^{A_j/2} \frac{d (\xi_x - \xi)}{[(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2]} \end{aligned}$$



olur, nihai olarak

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \log [(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2] (\xi_x - \xi) \Big|_{-A_j/2}^{A_j/2} + \frac{1}{2\pi} (\xi_x - \xi) \Big|_{-A_j/2}^{A_j/2} - \frac{\eta_x}{2\pi} \arctan \left( \frac{\xi_x - \xi}{\eta_x} \right) \Big|_{-A_j/2}^{A_j/2} \quad (5.19)$$

bulunur.

Etki katsayıları  $d_{ij}$  için,

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) = \nabla G \cdot \mathbf{n}_j$$

dır, burada

$$\nabla G(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_j = -\frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{y})}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}|^2} \cdot \mathbf{n}_j = -\frac{1}{2\pi} \frac{\eta_x}{[(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2]}$$

olur, bunun  $j$  paneli boyunca integrali

$$d_{ij} = \frac{1}{2\pi} \arctan \left( \frac{\xi_x - \xi}{\eta_x} \right) \Big|_{-A_j/2}^{A_j/2} \quad (5.20)$$

verir. Kendini indükleyen katsayı için, nokta  $\mathbf{x}_i$  panel orta noktasıyla çakışır yani  $\xi_x = 0$  ve  $\eta_x = 0$ . Yukarıdaki integral Cauchy Başlıca Değeri (Principal Value) olarak hesaplanır, yani

$$d_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A_j/2}^{-\varepsilon} d\xi + \int_{\varepsilon}^{-A_j/2} d\xi \right\} \frac{\eta_x}{[(\xi_x - \xi)^2 + \eta_x^2]}$$

dir, bu da düzenli panel şekilleri için sıfırdır.

### 5.3 İki akışkanlı baraj yıkımı problemine uygulama

Yukarıda tartışılan yöntem iki akışkanlı baraj yıkımı problemine uygulanabilir. Bu durumda sınır değer problemini iki bölgede ifade etmeli fakat her ikisini arayüzdeki şartlarla birleştirmeliyiz.

Sol bölge için uygulanan işlemi takip ederek

$$a_i \varphi_i^- - \sum_{j=1}^{N_D^-} \varphi_{n,j}^- g_{ij} - \sum_{j=N_D^-+1}^{N_D^-+N_I} \varphi_{n,j}^- g_{ij} + \sum_{j=N_D^-+1}^{N_D^-+N_I} \varphi_j^- d_{ij} + \sum_{j=N_D^-+N_I+1}^{N_D^-+N_I+N_N^-} \varphi_j^- d_{ij} = e_i \varphi_i^- - \sum_{j=1}^{N_D^-} \varphi_j^- d_{ij} - \sum_{j=N_D^-+N_I+1}^{N_D^-+N_I+N_N^-} \varphi_{n,j}^- g_{ij} \quad (5.21)$$

buluruz, burada  $N_D^-$  serbest yüzeyi temsil etmek için kullanılan panel sayısını,  $N_I$  arayüzdeki panel sayısını ve  $N_N^-$  ise dip ve yan sınırın bölmelenmesindeki panel sayısını göstermektedir. Yukarıdaki denklemde katsayılar  $(a_i, e_i)$ ,  $(1/2, 0)$  dir eğer hız potansiyeli panel  $i$  de bilinmiyorsa, eğer hız potansiyeli verilmişse katsayılar  $(1/2, 0)$  dir Denklem (5.21) tüm panel merkezleri için yazılabilir, böylece  $N_D^- + N_I + N_N^-$  denklemden ve  $N_D^- + 2N_I + N_N^-$  bilinmeyenden oluşan bir sistem bulunur.

Benzer bir denklem sistemi sağ bölge için elde edilir,

$$\begin{aligned}
a_i \varphi_i^+ + \sum_{j=1}^{N_N^+} \varphi_j^- d_{ij} + \sum_{j=N_N^++1}^{N_N^++N_I} \varphi_{n,j}^- g_{ij} + \sum_{j=N_N^++1}^{N_N^-+N_I} \varphi_j^+ d_{ij} \\
- \sum_{j=1}^{N_D^+} \varphi_{n,j}^- g_{ij} = e_i \varphi_i^+ \sum_{j=1}^{N_N^+} \varphi_{n,j}^- g_{ij} - \sum_{j=N_N^++N_I+1}^{N_N^-+N_I+N_D^+} \varphi_j^- d_{ij}
\end{aligned} \quad (5.22)$$

burada  $N_D^+$  hem yatay hem dikey serbest yüzeylerdeki panelleri içerir, serbest yüzeyler sırasıyla  $x = 0$   $y \in (\delta, 1)$ , ve  $x \in (0, 20)$   $y = 1$  denklemleriyle verilir.

Denklem (5.23)  $\Omega^+$ 'nın sınırında olan panellerin merkezlerinde yazılabilir, böylece  $N_D^+ + N_I + N_N^+$ , with  $N_D^+ + 2N_I + N_N^+$  bilinmeyenli bir sistem bulunur. Dikkat ediniz ki, (5.23)'de arayüzeyde normal türevin bağlantısı zaten uygulanmıştı, denklemin ikinci teriminden görülebileceği gibi.

Toplamda, denklemler (5.21) ve (5.23),  $N_D^- + N_D^+ + 2N_I + N_N^- + N_N^+$  ve  $N_D^- + N_D^+ + 3N_I + N_N^- + N_N^+$  bilinmeyenli bir sistem verir, çünkü arayüzeyde normal türevler arasındaki bağıntı  $\partial\varphi/\partial n_i$  zaten kullanılmıştı. Denklem (5.9) ile verilen arayüzeyde basıncın devamlılığı şartı ile ilave olarak  $N_I$  denklem sisteme eklenir, bu da ayrık formda

$$\varphi_i^+ - \gamma \varphi_j^- = \gamma(y_j - \delta) - (y_i - 1) . \quad (5.23)$$

şeklindedir. Burada,  $i$  ve  $j$ , aynı paneli ifade etmesine rağmen, farklıdır çünkü sol ve sağ bölgelerde paneller değişik şekillerde sıralanmıştır. Denklem (5.21) ve (5.23)'de uygulanan sıralamayı kullanarak

$$j = N_D^- + (N_I - (i - N_N^+)) .$$

buluruz. Denklemler (5.21), (5.23) ve (5.23) ile oluşan doğrusal sistemin çözümü sınır boyunca tamamlayıcı bilgi sağlar ve sınır integral temsilini kullanarak rasgele bir noktadaki hız potansiyelini bulmamızı sağlar. Kıyaslama amacıyla, arayüzeyin sol ve sağ taraflarında veya serbest yüzeyde hız potansiyelinin dağılımı kullanılarak teğet hız bileşeni ve normal hız bileşeni hesaplanabilir.

Problemin çözümü için kullanılan ayrıklaştırma (discretization) için de bazı açıklamalar yapmak gerekir. Ayrıklaştırmada iki parametre vardır: minimum panel büyüklüğü  $a_m$  ve panel genliği  $\epsilon$  için büyüme faktörü. Bölgelerde çözümün keskin meyilli olması beklenen üç küçük bölge vardır, bu bölgelerde ayrıklaştırmada dikkatli olunmalıdır. Bu bölgeler: köşe nokta  $(0, \delta)$  komşuluğu, dip köşe nokta  $(0, 0)$  komşuluğu ve dikey ve yatay serbest yüzeylerin kesiştiği köşe nokta  $(0, 1)$  komşuluğudur. Bu noktalarda birleşen sınır parçaları için ilk panelin genliği  $a_m$ 'ye eşitlenir, ve büyüme faktörü  $\epsilon$  kullanılarak takip eden panellerin büyüklüğü saptanır.

Panel sayısı tam sayı olduğu için, panel büyüklüğünde küçük bir ayarlama yapılmalıdır. Yani, eğer  $L$  ayrıklaştırılacak uzunluk,  $a$  minimum panel büyüklüğü ve  $\epsilon$  büyüme faktörü ise, bu durumda ayrıklaştırma için gerekli panel sayısı

$$a + a\epsilon + a\epsilon^2 + \dots + a\epsilon^{N-1} = a \frac{1 - \epsilon^N}{1 - \epsilon} = L ,$$

şeklinde olmalıdır. Yukarıdaki denklemden

$$\epsilon^N = 1 + \frac{L}{a}(\epsilon - 1)$$

buluruz ve gerekli panel sayısı

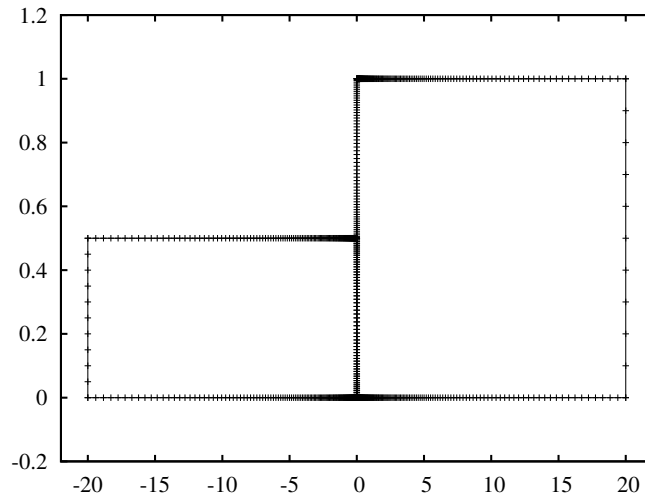
$$N = \frac{\log(1 + L(\epsilon - 1)/a)}{\log \epsilon} ,$$

olur. Kesme işlemi (truncation) için, ayrıklaştırmada kullanılacak genliğin  $a$  tam değeri

$$a = L \frac{\epsilon - 1}{\epsilon^N - 1}$$

şekindedir. İki bölge arasındaki arayüzey ve serbest yüzeyin dikey kısmı için, her iki uç ayrıntılandırılmalıdır. Bu durumda sınır kısmı aynı uzunlukta iki parçaya bölünür ve yukarıdaki işlem her iki parçaya da uygulanır. İki yan duvarda, yükseklikten bağımsız olarak 10 panel kullanılmıştır.

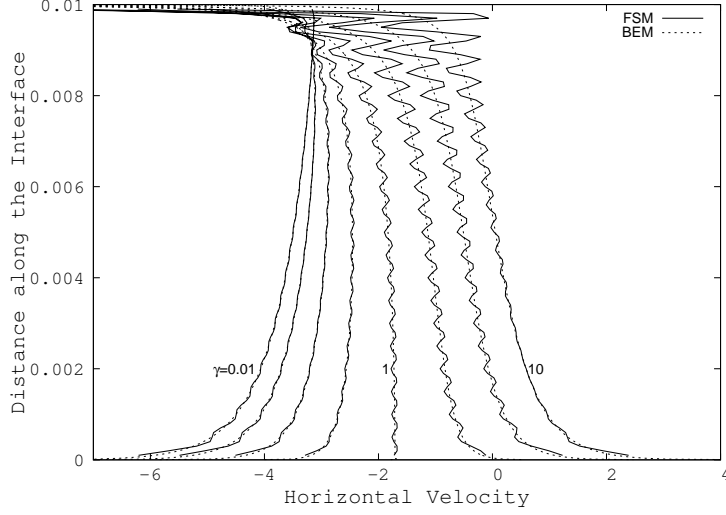
Hesaplamalarda minimum panel büyüklüğü  $a_m = 0.00001$  ve büyüme faktörü  $\epsilon = 1.03$  dir. Şekil 5.3'de,  $\delta = 0.5$  durumu için bir ayrıklaştırma örneği verilmiştir.



Şekil 5.3: Durum  $\delta = 0.5$  için kullanılan ayrıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz.

## 5.4 Sınır Eleman Yöntemi Sonuçları ile Fourier Seri Yöntemi Sonuçlarının Kıyaslanması

Fourier Serisi yöntemi sonuçları ile Sınır Eleman yöntemi sonuçları arasındaki kıyaslamalar şekil 6.1-6.10'da gösterilmiştir. Tüm şekillerde Fourier serisi ile yapılan hesaplamalarda 3000 terim alınmıştır. Şekil 5.4'de ( $\delta = 0.01$ ) yüksek  $\gamma$  değerleri için Fourier Serisi sonuçlarının dalgalandığını farkedebiliriz. Parametre  $\delta$ 'nın 0.1 ile 0.75 arasında değiştiği Şekil 5.5- 5.8'de dalgalanma görmemekteyiz. Bunun anlamı çok küçük  $\delta$  için Fourier Serisi yönteminin yakınsama problemi yaşamamasıdır. Fourier Serisi yöntemi için bir diğer yakınsama problemi,  $\gamma = 10$  olduğundadır (Şekil 5.4- 5.8). Aslında  $\gamma$ 'nın çok büyük değerler alması fiziksel olarak mümkün olmayan durumlardır. Parametre  $\delta$ 'nın çok küçük olması ise kuru taban durumuna denk gelmekte ve daha önce çözülen bir problemdir. Dolayısıyla görülen dalgalanmalar önemli bir problem teşkil etmemektedir.



Şekil 5.4: Arayüzeydeki yatay hız,  $\delta = 0.01$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve sağa doğru ilerledikçe  $\gamma$  sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

Parametre  $\gamma$ 'nın birden büyük değerleri için  $(0, 0)$  noktası yakınındaki yatay hız profilinin şeklinin dramatik bir şekilde değiştiğini görmekteyiz. Parametre  $\gamma < 1$  için dipteki hız profili kuru taban durumuna benzerdir; her iki sıvı da sola doğru hareket eder. Fakat  $\gamma > 1$  için sağa doğru hareket ederler. Yani  $\gamma = 1$  dip noktası  $(0, 0)$ 'daki yatay hızın davranışı için bir çatal noktasıdır (bifurcation point).

Köşe nokta için  $(0, \delta)$  ise, yatay hız, beklendiği gibi, kuvvetli tekilliktir;  $\gamma$  arttıkça tekillik kuvvetlenir.

Şekil 6.6-6.10'de, sağdaki akışkanın dikey hızı gösterilmiştir. Yatay hız durumunda olduğu gibi,  $\delta = 0.01$  olduğunda Fourier Serisi sonuçlarında dalgalanmalar vardır (Bkz Şek. 5.9).

Tüm Fourier seri hesaplamalarında, 3000 terim kullanılmıştır. Yalnız  $(\delta = 0.5, \gamma = 10)$ ,  $(\delta = 0.75, \gamma = 4)$  ve  $(\delta = 0.75, \gamma = 10)$  durumlarında yakınsaklık problemleri nedeniyle 1000 terim kullanılmıştır.

Sol ve sağdaki akışkanların dikey hızları şekil 5.14- 5.21'de kıyaslanmıştır, burada  $\delta = 0.5$  dir ve  $\gamma$ , 0.01'den 10'a kadar değişmektedir. Sağ ve sol akışkanların eşit yatay ve dikey hızla sahip oldukları tek durum  $\gamma = 1$  dir (bkz şek. 5.18).

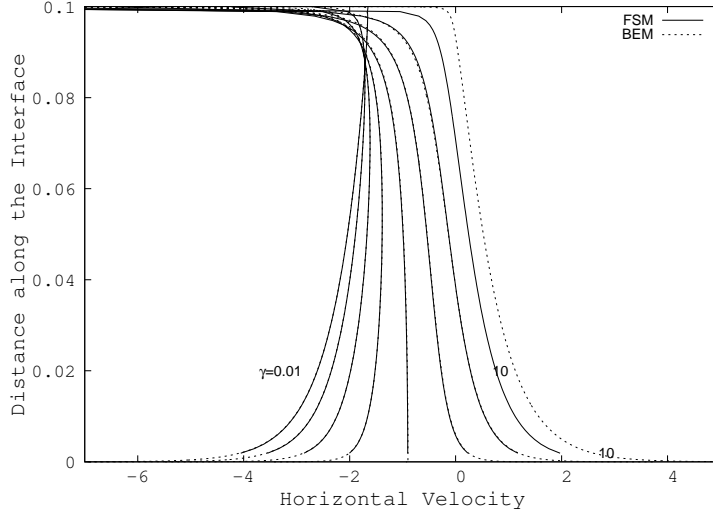
## 5.5 Tekillik Analizi

Bu kısımda köşe noktadaki tekilliğin mertebesini saptamaya çalışacağız. Öncelikle bir önceki rapordaki sonuçları özetleyip ardından köşe noktadaki tekillik ile ilgili somut bazı sonuçlara varacağız. Yarı şeritler,  $(x > 0, 0 < y < 1)$  ve  $(x < 0, 0 < y < \delta)$ 'da sırasıyla tanımlı kompleks hızları  $\omega^+(z)$  ve  $\omega^-(z)$  ( $z = x + iy$ ) kullanarak ana mertebe problemini hızlar cinsinden ifade etmek işimizi kolaylaştıracaktır. Burada  $\omega^+(z) = u^+ - iv^+$  ve  $\omega^-(z) = u^- - iv^-$  kendi bölgelerinde analitiktir.

Bölge  $\omega^+(z)$  için sınır şartları

$$u^+ = 0, \quad (y = 1, x > 0),$$

$$v^+ = 0, \quad (y = 0, x > 0),$$



Şekil 5.5: Arayüzeydeki yatay hız,  $\delta = 0.1$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve sağa doğru ilerledikçe  $\gamma$  sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

$$v^+ = -1, \quad (x = 0, \delta < y < 1),$$

dır ve  $\omega^-(z)$  için şartlar

$$u^- = 0, \quad (y = \delta, x > 0),$$

$$v^- = 0, \quad (y = 0, x > 0),$$

dır. Arayüzeydeki ( $x = 0, 0 < y < \delta$ ) şartlar

$$v^+ + 1 = \gamma(v^- + 1), \quad u^+ = u^-, \quad (5.24)$$

dır.

Şimdi köşe nokta  $(0, \delta)$  yakınında üç referans durumu inceleyelim:

**Durum**  $\gamma = 0$

Sol tarafta hiç sıvı yoktur ve  $\omega^+(z)$ 'nin  $(0, \delta)$  noktasında tekiliği yoktur.

**Durum**  $\gamma = 1$

Bu durumda barajın her iki tarafındaki sıvı aynıdır. Dolayısıyla altındeks "+" ve "-" hız terimlerinde kullanılmaz. Kompleks hız,  $u - iv$ , köşe nokta  $(0, \delta)$  etrafında analitiktir, ayrıca  $(y = \delta, x < 0)$ 'da  $u = 0$  ve  $(x = 0, \delta < y < 1)$ 'da  $v = -t$  dir (bkz şekil 5.22).

Polar koordinatlarda sınır değer problemi

$$u - iv \text{ analitik,} \quad 0 < \theta < \frac{3\pi}{2}, r > 0$$

$$u = 0, \quad \theta = 0$$

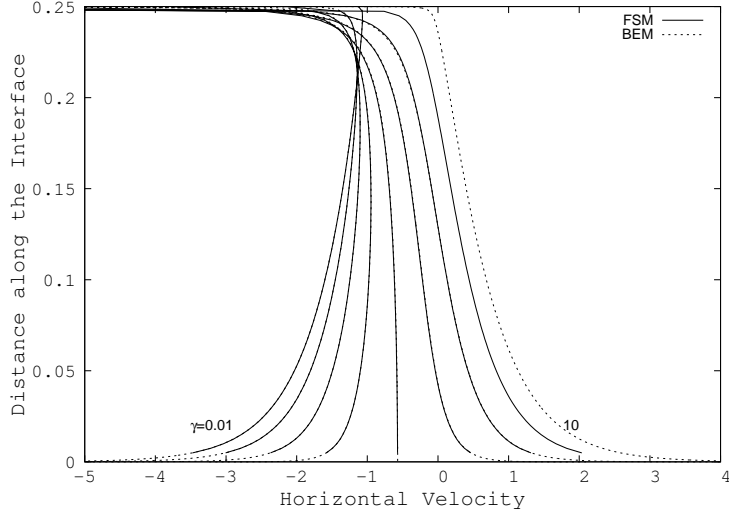
$$v = -t, \quad \theta = 3\pi/2,$$

dir. Bir çok tekil çözüm vardır, biz en az tekil olanını seçiyoruz

$$u - iv = -Aiz^{-1/3} + it,$$

burada  $A$  bir sabittir. Bileşenleri yazarsak,

$$u = -Ar^{-1/3} \sin(\theta/3) \quad r \rightarrow 0 \quad \text{iken,}$$



Şekil 5.6: Arayüzeydeki yatay hız,  $\delta = 0.25$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve sağa doğru ilerledikçe  $\gamma$  sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

$$v = Ar^{-1/3} \cos(\theta/3) - t \quad r \rightarrow 0 \quad \text{iken,} \quad (5.25)$$

elde ederiz. **Durum**  $\gamma = \infty$  Bu durumda barajın solundaki akışkan katı hale gelir (katı basamak durumu). Yine alt indisler "+" ve "-" kullanılmaz, çünkü bu limit durumunda yalnız bir akışkan vardır. Hız potansiyeli,  $\phi$ , Laplace denklemini köşe nokta  $(0, \delta)$  etrafında sağlar,  $(0 < y < \delta, x = 0)$ 'da  $\phi_x = 0$  dir ve  $(x = 0, \delta < y < 1)$ 'da  $\phi = t(1 - y)$  dir (bkz şekil 5.23).

Polar koordinatlarda sınır değer problemi

$$\Delta\phi = 0, \quad 0 < \theta < \pi, r > 0$$

$$\phi_x = 0, \quad \theta = 0$$

$$\phi = t(1 - y), \quad \theta = \pi,$$

dir. Laplace denkleminin çözümü

$$\phi = Ar^\alpha \cos(\alpha\theta) + E,$$

verir. Sınır şartlarını uygulayarak

$$\phi = A \sum_{n=1}^{\infty} r^{(2n-1)/2} \cos((2n-1)\theta/2) + t(1 - \delta - r)$$

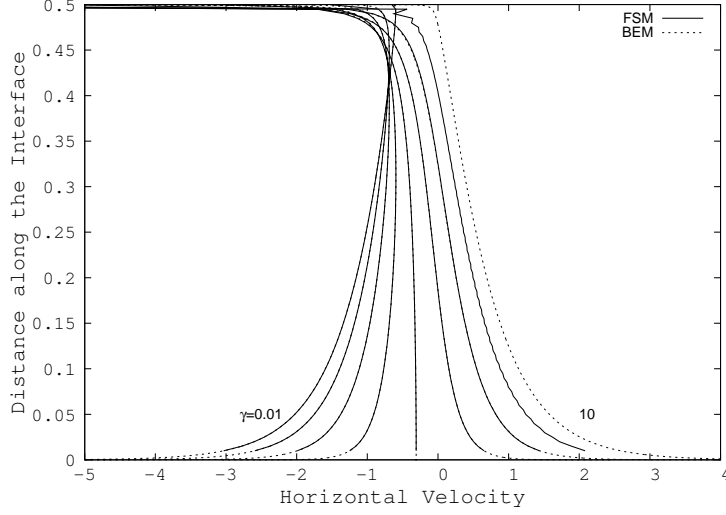
elde ederiz ya da

$$\phi = Ar^{1/2} \cos(\theta/2) + t(1 - \delta - r) + O(r^{3/2}) \quad r \rightarrow 0 \quad \text{iken.}$$

Alternatif formdaki çözümün de

$$\phi = Ar^{1/2} \cos(\theta/2) + t(1 - \delta) + tr \cos \theta + O(r^{3/2}) \quad r \rightarrow 0 \quad \text{iken}$$

sınır şartlarını sağladığını fakat bu durumda akışın çevrintisiz (irrotational) olduğuna dikkat ediniz, yani, akışa girdap eklenmiştir. Takip eden analizde bu çözüm kullanılmamıştır.



Şekil 5.7: Arayüzeydeki yatay hız,  $\delta = 0.5$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve sağa doğru ilerledikçe  $\gamma$  sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

Yatay hız

$$u = \phi_x = \phi_r r_x + \phi_\theta \theta_x$$

$$u = \frac{A}{2} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} - t \sin \theta + O(r^{1/2}) \quad r \rightarrow 0 \quad \text{iken}$$

şeklinde bulunur, bu ana merteye davranışı olarak

$$u = \frac{A}{2} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(r^{1/2}) \quad r \rightarrow 0 \text{ ve } t \rightarrow 0, \quad \text{iken} \quad (5.26)$$

verir.

Köşe nokta tekilliğinin  $\gamma$  parametresine bağlı olduğunu ve  $\gamma$  sıfırdan sonsuza arttığında tekilliğin  $r^0$  dan  $r^{-1/2}$  ye değiştiğini bu analizden anlıyoruz. Varsayalım ki,  $|z - i\delta| \rightarrow 0$  iken

$$\omega^+(z) \sim D(z - i\delta)^{-\alpha(\gamma)}, \quad \omega^-(z) \sim E(z - i\delta)^{-\alpha(\gamma)}$$

olsun, burada kompleks sabitler  $D$  ve  $E$  bölgedeki akışa bağlıdır ve  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ . Yerel polar koordinatlarda  $z - i\delta = r \exp(i\theta)$ ,

$$\omega^+(z) \sim D r^{-\alpha} \exp(-i\alpha\theta), \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2, r \rightarrow 0)$$

$$\omega^-(z) \sim E r^{-\alpha} \exp(-i\alpha\theta), \quad (-\pi < \theta < -\pi/2, r \rightarrow 0), \quad (5.27)$$

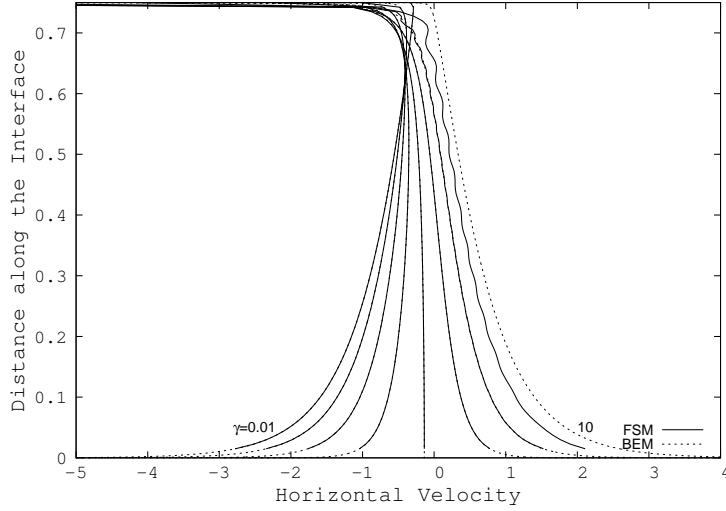
olur. Sınır şartlarından  $E \exp(i\alpha\pi)$ 'nin imajiner olduğunu, mesela,  $iE_R$  ve  $D \exp(-i\alpha\pi/2)$ 'nin reel olduğunu, mesela,  $D_R$  çıkarırız. Akışkan hızlarının köşe nokta yakınında

$$\omega^+(z) = u^+ - iv^+ \sim D_R r^{-\alpha} \exp(i\alpha(\pi/2 - \theta)), \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2, r \rightarrow 0)$$

$$\omega^-(z) = u^- - iv^- \sim iE_R r^{-\alpha} \exp(-i\alpha(\pi + \theta)), \quad (-\pi < \theta < -\pi/2, r \rightarrow 0), \quad (5.28)$$

şeklinde davrandığı sonucuna ulaşırız. Arayüzeydeki eşleme şartı (5.24),  $\theta = -\pi/2$ ,  $\alpha$  ve  $\gamma$  arasında bir bağıntı verir,

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma + 1)}}. \quad (5.29)$$



Şekil 5.8: Arayüzeydeki yatay hız,  $\delta = 0.75$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve sağa doğru ilerledikçe  $\gamma$  sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

Doğrudan hesaplama ile

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(1) = 1/3, \quad \alpha(\infty) = 1/2$$

olduğunu kontrol edebiliriz, bu da bizim daha önce yaptığımız analizin sonuçlarına karşı gelmektedir. Şart  $D_R < 0$  olduğunu söylemek mantıklıdır. Eğer öyleyse, köşe noktasının serbest yüzey sıvı bölgesinin dışına doğru hareket eder.

Arayüzeyin tabanla bulunduğu köşe noktada,  $(0, 0)$ , kompleks hızlar

$$\omega^+(z) \sim A \log z = A \log(r + i\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2, r \rightarrow 0)$$

$$\omega^-(z) \sim B(\log z - i\pi) = B \log(r + i\theta - i\pi) \quad (\pi/2 \leq \theta \leq \pi, r \rightarrow 0) \quad (5.30)$$

şeklinde davranır, burada  $A$  ve  $B$  reel katsayılarıdır, ve dipteki sınır şartı sağlanır. Bu asimptotik formüllerin formu baraj yıkımı probleminin çözümünden esinlenilmiştir (Korobkin & Yılmaz, 2009), bu da şimdiki formülasyonda  $\gamma = 0$  ile elde edilebilir. Bileşenleri yazarsak köşe noktasında

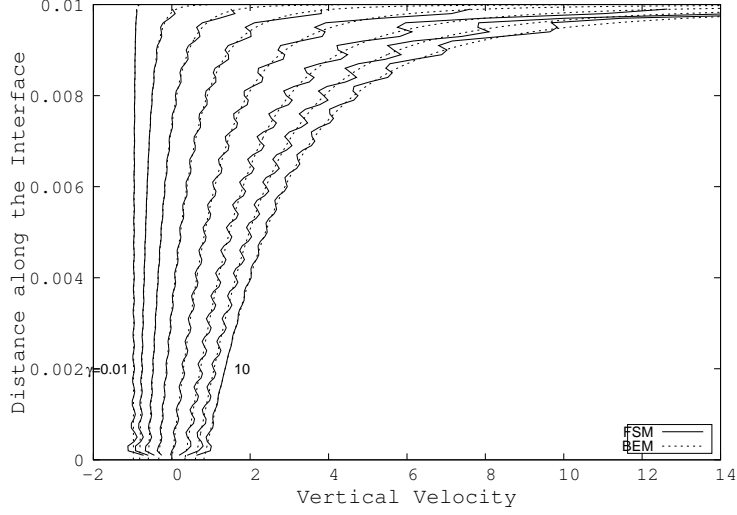
$$\begin{aligned} u^+ &\sim A \log r, & v^+ &\sim -A\theta \\ u^- &\sim B \log r, & v^+ &\sim B(\pi - \theta) \end{aligned}$$

buluruz. İki akışkan arasındaki arayüzeyde,  $\theta = \pi/2$ , eşleme şartları (5.24)

$$B = A, \quad A = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \quad (5.31)$$

verir. Formül (5.31)  $\gamma = 0$  olduğunda  $A = 2/\pi$  tahmin eder, bu da Korobkin & Yılmaz (2009) (Korobkin & Yılmaz, 2009) (bkz denklem (13))'in sonucuyla örtüşür, ve  $\gamma = 1$  olduğunda tekillik yoktur. Arayüzey sola doğru hareket eder eğer  $\gamma < 1$  ise ve  $\gamma > 1$  ise sağa doğru hareket eder.





Şekil 5.9: Bölge  $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzdeki dikey hızı,  $\delta = 0.01$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve  $\gamma$  sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

### 5.5.1 Katsayı $D_R$ 'in hesaplanması

Denklem (5.28)'deki ilk formülden dikey sınırdaki  $x = 0, 0 < y < 1$  yatay hız,  $u^+$ ,

$$u^+ \sim D_R r^{-\alpha}, \quad \theta = \pi/2, r \rightarrow 0$$

$$u^+ \sim D_R \cos(\alpha\pi) r^{-\alpha}, \quad \theta = \pi/2, r \rightarrow 0,$$

şeklinde bulunur, bu da parçalı olarak

$$u^+ = \phi_{0x}^+(0, y) \sim D_R \left\{ \begin{array}{ll} (y - \delta)^{-\alpha} & y > \delta \\ \cos(\alpha\pi)(\delta - y)^{-\alpha} & y < \delta \end{array} \right\}, \quad (5.32)$$

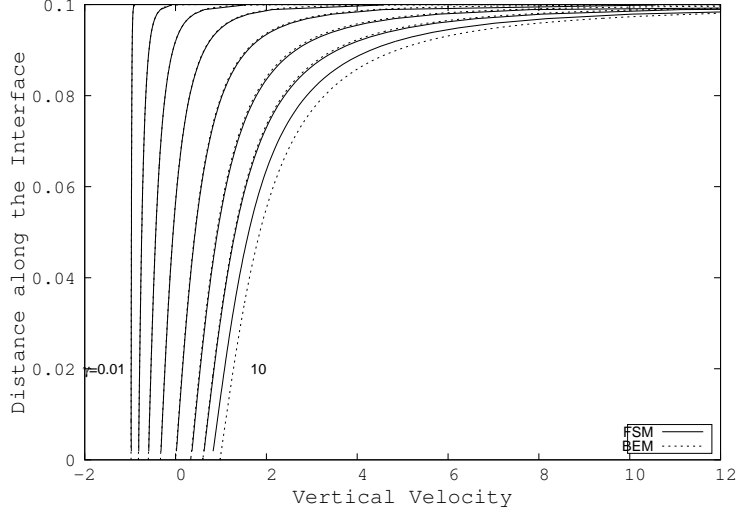
şeklinde yazılır. Fourier serisi çözümünü kullanarak türev  $\phi_{0x}^+$  ifadesi için

$$-\frac{1}{2}c_n \mu_n \sim D_R \left[ \int_{\delta}^1 (y - \delta)^{-\alpha} \cos(\mu_n y) dy + \cos(\alpha\pi) \int_0^{\delta} (\delta - y)^{-\alpha} \cos(\mu_n y) dy \right], \quad (5.33)$$

elde ederiz, burada  $\mu_n = (2n + 1)\pi/2$ . Bazı basit cebirsel işlemlerden sonra denklem (5.33) deki integrallerin asimtotik formüllerini, büyük  $n$  değerleri için,

$$\int_0^{\delta} (\delta - y)^{-\alpha} \cos(\mu_n y) dy \sim \mu_n^{\alpha-1} \left\{ \cos(\mu_n \delta) \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda}{\lambda^{\alpha}} d\lambda + \sin(\mu_n \delta) \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda^{\alpha}} d\lambda + \mathcal{O}(\mu_n^{-1}) \right\}$$

$$\int_{\delta}^1 (y - \delta)^{-\alpha} \cos(\mu_n y) dy \sim \mu_n^{\alpha-1} \left\{ \cos(\mu_n \delta) \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda}{\lambda^{\alpha}} d\lambda - \sin(\mu_n \delta) \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda^{\alpha}} d\lambda + \mathcal{O}(\mu_n^{-1}) \right\},$$



Şekil 5.10: Bölge  $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzdeki dikey hızı,  $\delta = 0.1$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve  $\gamma$  sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

şeklinde buluruz, burada Gradshteyn & Ryzhik'den (Gradshteyn & Ryzhik, 2007)

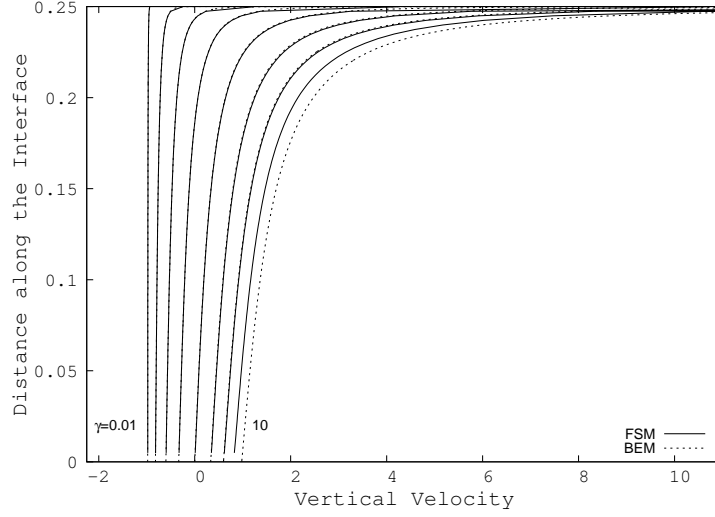
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda}{\lambda^{\alpha}} d\lambda = C(\gamma) = \Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{(1 - \alpha)\pi}{2}\right),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda^{\alpha}} d\lambda = S(\gamma) = \Gamma(1 - \alpha) \sin\left(\frac{(1 - \alpha)\pi}{2}\right).$$

Nihai olarak, (5.33) deki integrallerin asimtotik formlarını yerine yazarsak büyük  $n$  için

$$c_n \sim -\frac{2D_R}{\mu_n^{2-\alpha}} \{ \cos(\mu_n \delta) C(\gamma) [1 + \cos(\alpha\pi)] - \sin(\mu_n \delta) S(\gamma) [1 - \cos(\alpha\pi)] \}, \quad (5.34)$$

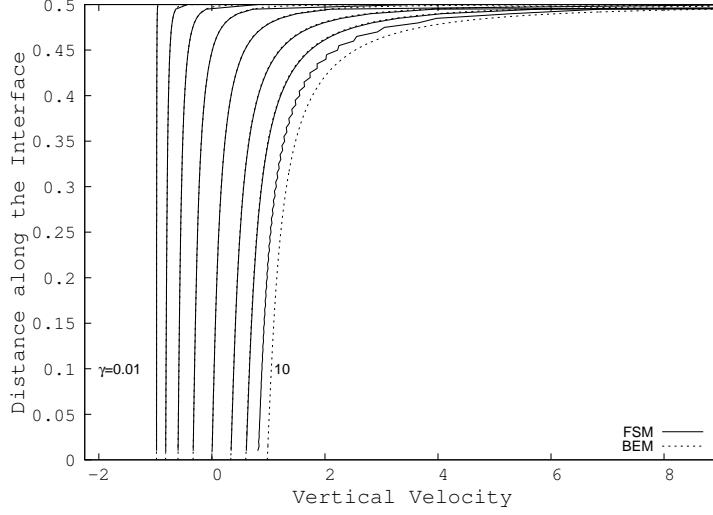
olur. Denklem (5.34) ü kullanarak,  $D_R$  hesaplanabilir (Bkz Şek. 6.3).



Şekil 5.11: Bölge  $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzdeki dikey hızı,  $\delta = 0.25$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve  $\gamma$  sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

Şekil 5.24'den görüleceği üzere  $n$  in çift değerleri için  $D_R$  in değeri  $-0.5870$  ye yaklaşırken,  $n$  in tek değerleri için ıraksamaktadır. Bu, homojen çözümlerin varlığı ihtimalini kuvvetlendirmektedir; problemin tek bir çözümü olmayabilir. Gerçektende, katsayılar matrisinin determinantının genelde çok küçük olduğu gözlemlenmiştir.

Şimdi de  $D_R$  katsayısının değerini sınır eleman analizinden elde edilen hızları kullanarak bulacağız.

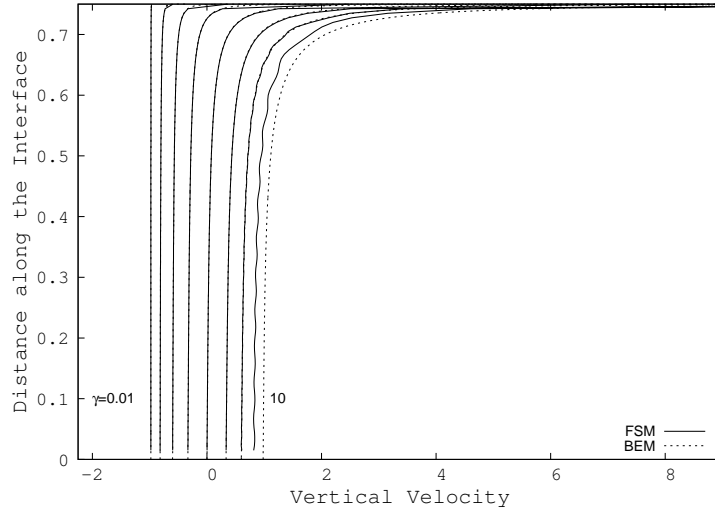


Şekil 5.12: Bölge  $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzdeki dikey hızı,  $\delta = 0.5$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve  $\gamma$  sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.

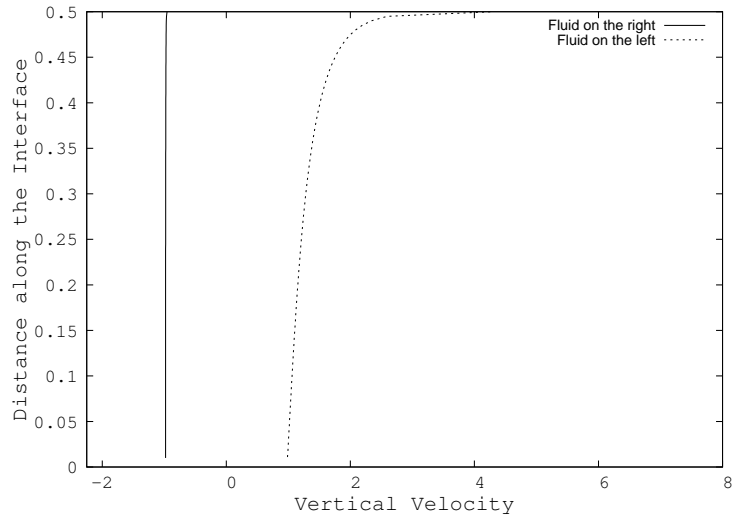
Tablo 5.1: Sınır eleman analizinden  $D_R$  değeri:  $\delta = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $t = 0.1$ ,  $x = 0$

$y$	$u^+$	$D_R$
0.48991127	-1.305931	-0.564368
0.498836	-2.785727	-0.586075
0.499048	-2.986347	-0.587556
0.499260	-3.258201	-0.589416
0.499472	-3.667534	-0.592968
0.499683	-4.311807	-0.587874
0.499894	-7.403372	-0.699777
0.500109	-14.658616	-0.699513
0.500326	-8.435848	-0.580677
0.500544	-7.231771	-0.590312
0.500762	-6.434673	-0.587699

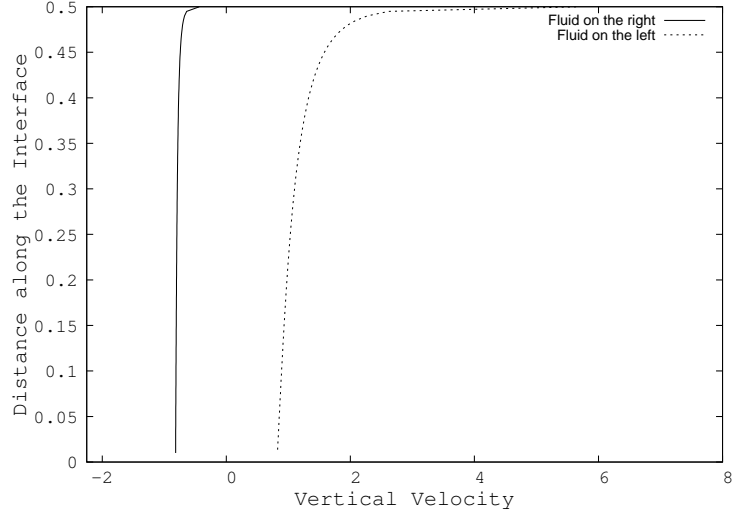
Tablo 5.5.1' den görüldüğü üzere  $D_R$  değeri, tekil nokta  $(0, \delta)$  ya en yakın iki nokta haricinde,  $-0.5877$  civarındadır. Demek ki sayısal analizde en yakın iki nokta için yatay hızlar güvenilir değildir. Bu değer  $-0.5877$  Fourier seri çözümünden elde edilen  $-0.5870$  değeri ile uyum içerisindedir.



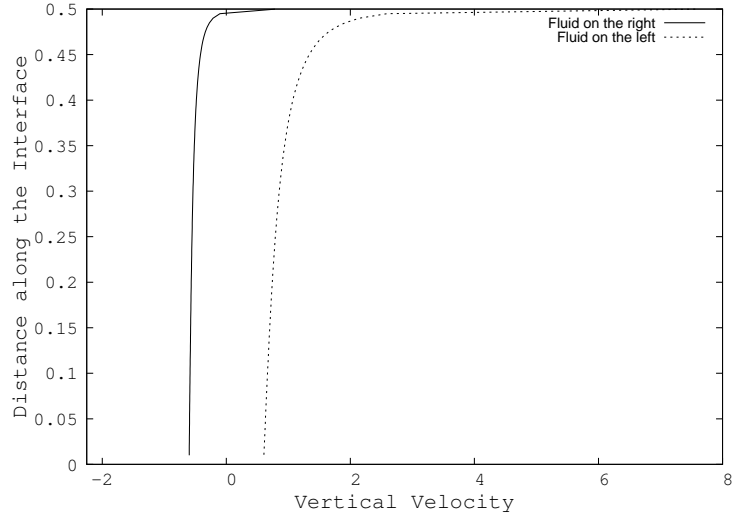
Şekil 5.13: Bölge  $\Omega^+$ 'daki akışkanın arayüzdeki dikey hızı,  $\delta = 0.75$  durumu için. Eğriler farklı  $\gamma$  değerleri için üretilmiştir. En soldaki eğri için  $\gamma = 0.01$  dir, ve  $\gamma$  sağa doğru ilerledikçe sırasıyla 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2 ve 10 değerlerini almaktadır.



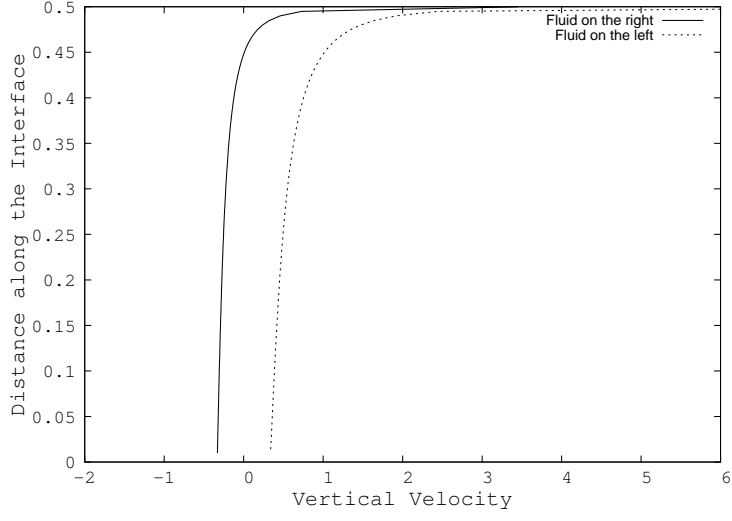
Şekil 5.14: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 0.01$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.



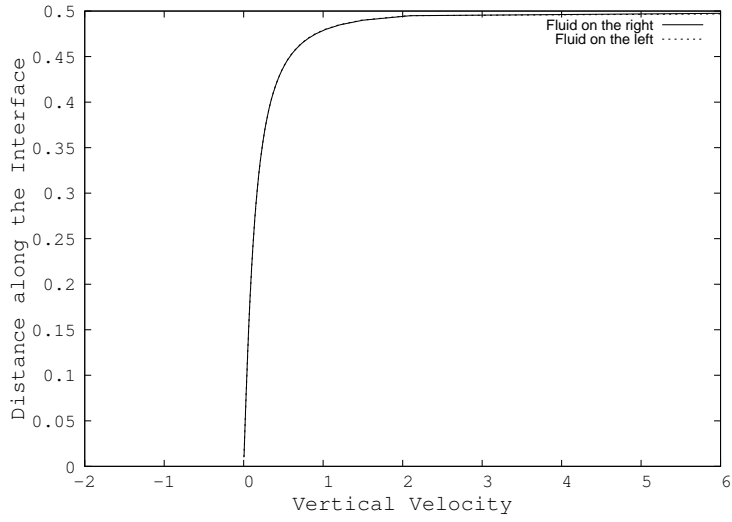
Şekil 5.15: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 0.1$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.



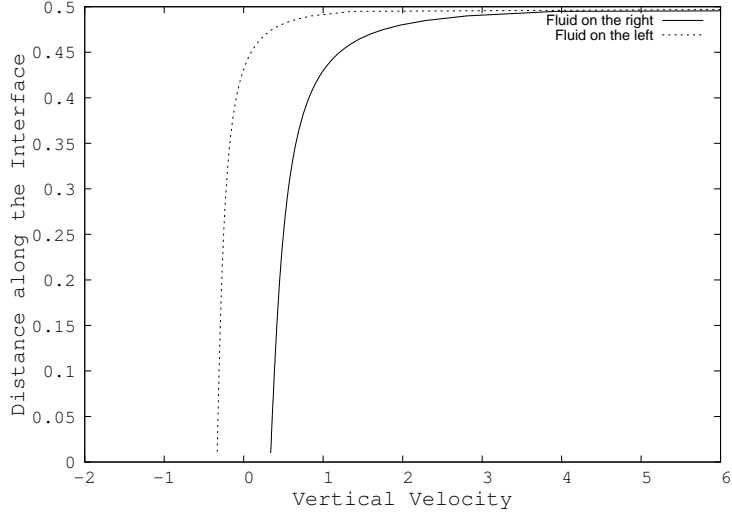
Şekil 5.16: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 0.25$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.



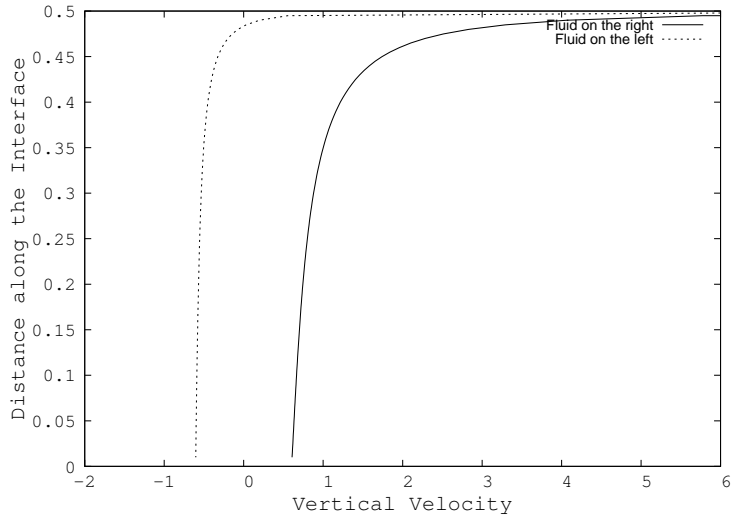
Şekil 5.17: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 0.5$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.



Şekil 5.18: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 1$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.

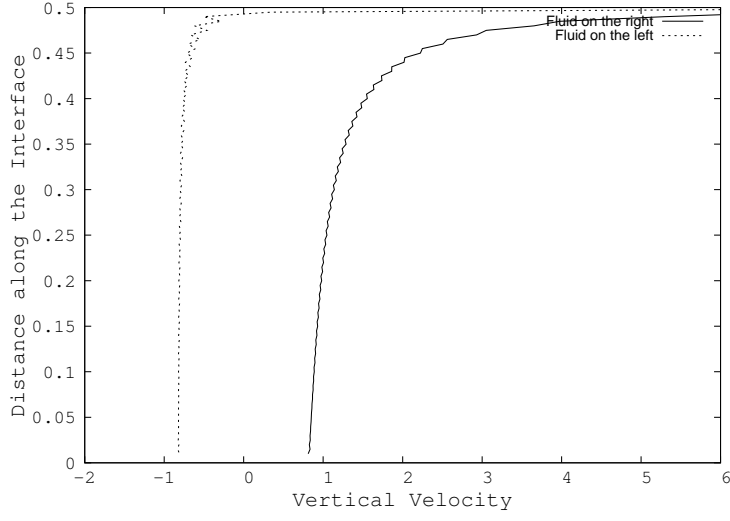


Şekil 5.19: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 2$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.

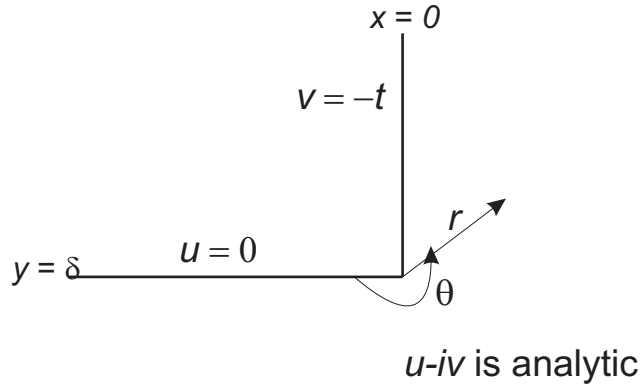


Şekil 5.20: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 4$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.

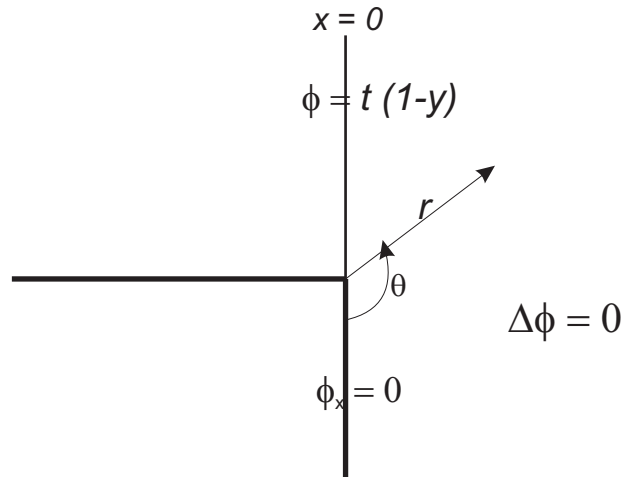




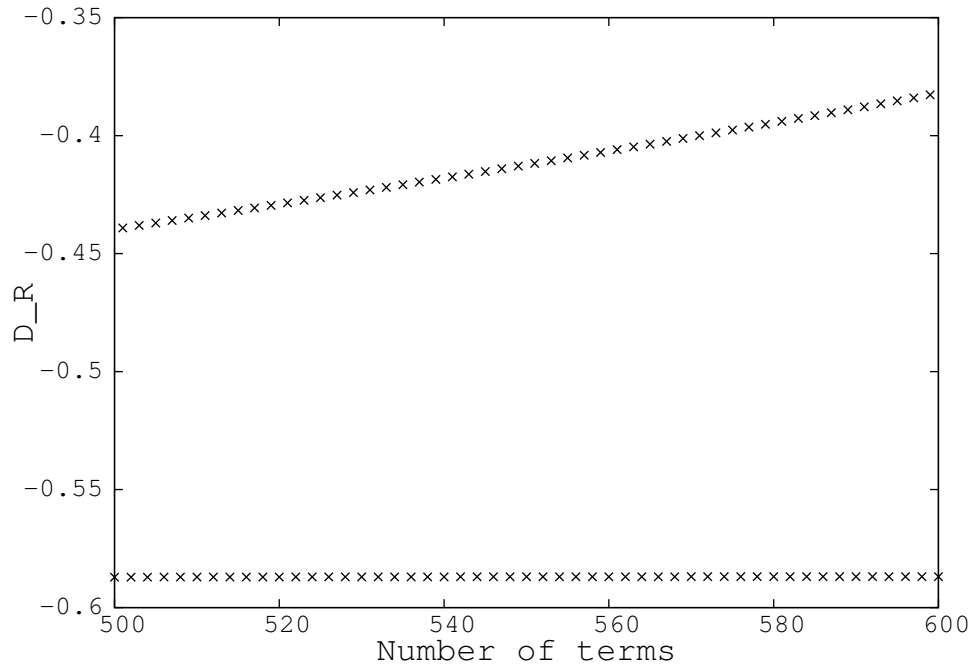
Şekil 5.21: Bölge  $\Omega^+$  ve  $\Omega^-$ 'deki akışkanların dikey hızlarının,  $\delta = 0.5$  ve  $\gamma = 10$  durumu için, arayüzey boyunca kıyaslanması.



Şekil 5.22: Durum  $\gamma = 1$  için köşe noktasının geometrisi.



Şekil 5.23: Durum  $\gamma = \infty$  için köşe noktası etrafındaki geometri.



Şekil 5.24: Fourier Serisi analizinden elde edilen  $D_R$ . Parametreler:  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 0.5$ .

## Bölüm 6

# İki Fazlı Akış için Sonlu Farklar Yöntemi(Level-Set Method)

### 6.1 İki fazlı akış için Navier-Stokes çözücü

İki faz akışkanına özellikleri hava-su arayüzünde düzgün bir şekilde değişen tek bir sıvı ile yaklaşacağız. Eğer sıkıştırılabilirlik etkisi ihmal edilebilirse sıvı yoğunluğu ve viskozitesi akış bölgesi(flow field) tarafından aktarılır. Yüzey kinematiği yüzünden akışkan özelliklerinin yüzeyel dağılımı zamanla değişir. Değişken yoğunluklu ve viskoziteli sıkıştırılmayan bir sıvı için Boyutsuz Navier-Stokes denklemleri eğrisel koordinatlarda şu şekildedir

$$\frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(J^{-1}u_i) + \frac{\partial}{\partial \xi_m}(U_m u_i) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) - J^{-1} \frac{\delta_{i2}}{Fr^2} + \\ &+ \frac{1}{Re \rho} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \mu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

burada  $x_i$   $i$ . Kartezyen koordinat ve  $u_i$  hız bileşeni,  $p$  basınç,  $\delta_{i2}/Fr^2$  yerçekimi terimi,  $Fr = U/\sqrt{gL}$  Froude sayısı,  $\delta_{ij}$  Kronecker delta.  $U$  ve  $L$  sırasıyla hız ve uzunluk için referans değerler iken, sıvı yoğunluğu ve viskozitesi  $\rho_w, \mu_w$  su değerleri kullanılarak boyutsuzlaştırılır. Reynold sayısı  $Re = \rho_w UL/\mu_w$  olarak tanımlanır.  $J^{-1}$  Jacobian'ın tersi ve

$$U_m = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (6.3)$$

$\xi_m$  eş-yüzeyine (iso-surface) dik hacim akışıdır (volume flux). Son olarak  $G_{mn}$  ağ (mesh) eğrilik tensörüdür.

$$G^{mn} = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} u_j \quad (6.4)$$

Yüzey gerilimi ve türbülans modellemesi bu evrede dahil edilmemiştir.

Yukarıdaki denklemin çözümü sadece akışkanın özellikleriyle ilgili değişkenlerde küçük ayarlamalar ile (Zang 1994)'de tanımlanan sayısal şemaya benzer bir şema ile elde edilir. Kartezyen hız ve basınç hücre merkezinde (cell center) tanımlanırken hacim akışı (volume flux) hızların

ikinci derece upwind interpolasyon ile hesaplandığı hücre yüzeylerinin (cell face) orta noktalarında tanımlanır. Böylece hacim akışı korunmuş olur ve momentum denklemi korunumlu şekilde yazılabilir. Yarı kapalı bir şema dekleme (6.2)'nin zaman integrallemesi için adapte edilir. Açık terimler Adam-Bashfort metodu ile hesaplanırken kapalı terimler için Crank-Nicolson metodu uygulanır, daha ayrıntılı çözüm ve Runge-Kutta integralleme metodu (Iafrazi, 2009)'de verilmiştir. Grid noktalar zamana bağlı olmadığından momentum dekleminin ayrıştırılmış şekli şu şekildedir

$$J^{-1}(u_i^{n+1} - u_i^n) = \Delta t \left\{ \left( 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta t_p} \right) \left[ C_i^n + \frac{1}{Re\varrho} D_E(u_i^n) \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta t_p} \left[ C_i^{n-1} + \frac{1}{Re\varrho} D_E(u_i^{n-1}) \right] + \frac{1}{\varrho} R_i(p^{n+1}) - J^{-1} \frac{\delta_{i2}}{Fr^2} + \frac{1}{2Re\varrho} D_I(u_i^{n+1} + u_i^n) \right\} \quad (6.5)$$

burada  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  ve  $\Delta t_p = t^n - t^{n-1}$ ;  $C_i^n$  n'inci zamandaki konvektif terimi gösterir  $R_i$  eğrisel koordinatlarda gradiyent operatörüdür;  $D_I$  ve  $D_E$  sırasıyla köşegen ve köşegen dışı difüzyon operatörleridir.

Konvektif terimler için adapte edilen açık şemadan dolayı zaman integrasyon adımı sınırlı olmalıdır. Bu amaçla,

$$CFL = \left( \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right) \Delta t = (|U| + |V| + |W|) \frac{\Delta t}{J^{-1}}$$

bütün zaman adımlarında bütün hesaplama alanında sabit olarak seçilmiştir.

Denklem (6.5)'i çözmek için ayrımsal adım yaklaşımı (fractional step approach) adapte edilmiştir. Yeni adımda basınç alanı (pressure field) bilinmediğinden,  $u_i^*$  yardımcı fonksiyonu tanımlanmıştır ve problem iki alt adıma parçalanmıştır.

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2Re\varrho J^{-1}} D_I \right) (u_i^* - u_i^n) = \frac{\Delta t}{J^{-1}} \left\{ \left( 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta t_p} \right) \left[ C_i^n + \frac{1}{Re\varrho} D_E(u_i^n) \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta t_p} \left[ C_i^{n-1} + \frac{1}{Re\varrho} D_E(u_i^{n-1}) \right] + \frac{1}{Re\varrho} D_I u_i^n - J^{-1} \frac{\delta_{i2}}{Fr^2} \right\} \quad (6.6)$$

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2Re\varrho J^{-1}} D_I \right) (u_i^{n+1} - u_i^*) = \Delta t \frac{1}{\varrho J^{-1}} R_i(p^{n+1}) \quad (6.7)$$

Denklem (6.6), yardımcı hız alan fonksiyonu  $u_i^*$ 'ı belirlemek için çözülürken (tahmin adımı), denklem (6.7)'de  $u_i^{n+1}$ 'in yardımcı fonksiyonla ilişkisi olduğu kabul edildi ve şu şekilde tanımlandı (düzeltici adım)

$$u_i^{n+1} - u_i^* = \frac{\Delta t}{\varrho J^{-1}} R_i(\phi^{n+1}) \quad (6.8)$$

Denklem (6.8), denklem (6.7)'ye yerleştirilerek şu elde edilebilir

$$R_i(p^{n+1}) = \varrho \left( J^{-1} - \frac{\Delta t}{2Re} D_I \right) \left( \frac{R_i(\phi^{n+1})}{\varrho J^{-1}} \right) \quad (6.9)$$

$\phi$  skaler fonksiyonu bir kereliğine hesaplandıktan sonra yukarıdaki bağıntı basınç alanını hesaplamak için kullanılabilir. Düzeltici (corrector) fonksiyonu  $\phi$  süreklilik fonksiyonundan belirlenir. Denklem (6.8)'den

$$u_i^{n+1} = u_i^* + \frac{\Delta t}{\varrho} \left( -\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_m} \right)$$

ve akışkanların tanımından (6.3)

$$U_m^{n+1} = U_m^* - \frac{\Delta t}{\rho} \left( G^{ml} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_l} \right). \quad (6.10)$$

(6.1) süreklilik denklemini kullanarak, düzeltici (corrector) fonksiyonu  $\phi$  için bir Poisson denklemini elde edilir

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{G^{ml}}{\rho} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi_l} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial U_m^*}{\partial \xi_m}. \quad (6.11)$$

Eğer hız sınırlarda atanırsa, denklem (6.10) denklem (6.11) için Neumann sınır koşulu oluşturur.

## 6.2 Hava-sıvı interfazının kinematığı

Diferansiyel denklem sistemi olarak, aşağıda verilen yoğunluk ve viskozite için oluşturulmuş iki transport denklemini ele alalım

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + u \cdot \nabla \mu = 0$$

Arayüzdeki akışkanların farklı özelliklerde olması sebebiyle, bu denklemler doğrudan çözülemez. Bu sorun, Level-set metodu ile, akışkan özelliklerini arayüze uzaklığı  $d$  olan düzgün fonksiyonlar gibi kabul ederek çözülmür.  $d$  uzaklığı  $t = 0$  anındaki bütün noktalar için hesaplanır, serbest yüzey konumu verilir. Sıvı ortamda  $d > 0$ , hava ortamında  $d < 0$  kabul edilir. Zaman ilerledikçe,  $d$  akış tarafından konveksiyonel bir özellik olarak görülebilir

$$\frac{\partial d}{\partial t} + u \cdot \nabla d = 0 \quad (6.12)$$

Bir materyal yüzeyi olan arayüz, her zaman  $d = 0$  seviyesi ile gösterilir.

Akışkan özelliklerindeki sıçramaların düzgün olması, kalınlığı hücre boyutuna bağlı olarak zamana göre sabit tutulan arayüzün küçük komşuluklarındaki sıçramaların genişletilmesi ile sağlanır. Böylece, akışkan özelliğinin mesafe ile değişimi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$f(d) = \begin{cases} f_w & \text{eğer } d > \delta \\ f_a & \text{eğer } d < -\delta \\ (f_w + f_a)/2 + (f_w - f_a)/2 \sin(\pi d/2\delta) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\delta$  sıçramanın yayıldığı bölge boyunca yarı genişliktedir. Hesaplama olarak,  $\delta$ 'nın kalınlığı, sıçrama en az 3 hücreyi kaplayacak şekilde, arayüzün normalini doğrultusunda seçilir. Geçiş bölgesinin yayılması yada yoğunlaşmasından kaçınmak için uzaklık fonksiyonu her zaman aralığında asıl arayüzden normal uzaklıkta olacak şekilde yeniden başlatılır. Bu, aşağıdaki verilen kararlı haldeki denklemin iterasyonu ile elde edilir

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} = S(d)(1 - |\nabla d|) \quad (6.13)$$

burada  $S(d)$  arayüz üzerinde sıfır olan işaret fonksiyonu olup, level-set şeması daha ayrıntılı olarak (Iafrazi, 2005)'de verilmiştir.

## 6.3 İki akışlı baraj yıkım problemlerine uygulama

### 6.3.1 Bölgenin ayrıklaştırılması

Problemin çözümü için kullanılan ayrıklaştırma (discretization) için de bazı açıklamalar yapmak gerekir. Ayrıklaştırmada iki parametre vardır: minimum panel büyüklüğü  $a_m$  ve panel genliği için büyüme faktörü  $\epsilon$ . Bölgelerde çözümün keskin meyilli olması beklenen üç küçük bölge vardır, bu bölgelerde ayrıklaştırmada dikkatli olunmalıdır. Bu bölgeler: köşe nokta  $(0, \delta)$ , komşuluğu, dip köşe nokta  $(0, 0)$  komşuluğu ve dikey ve yatay serbest yüzeylerin kesiştiği köşe nokta  $(0, 1)$ . Bu noktalarda birleşen sınır parçaları için ilk panelin genliği  $a_m$ 'ye eşitlenir, ve büyüme faktörü  $\epsilon$  kullanılarak takip eden panellerin büyüklüğü saptanır.

Panel sayısı tam sayı olduğu için, panel büyüklüğünde küçük bir ayarlama yapılmalıdır. Yani, eğer  $L$  ayrıklaştırılacak uzunluk,  $a$  minimum panel büyüklüğü ve  $\epsilon$  büyüme faktörü ise, bu durumda ayrıklaştırma için gerekli panel sayısı

$$a + a\epsilon + a\epsilon^2 + \dots + a\epsilon^{N-1} = a \frac{1 - \epsilon^N}{1 - \epsilon} = L \quad .$$

şeklinde olmalıdır. Yukarıdaki denklemden

$$\epsilon^N = 1 + \frac{L}{a}(\epsilon - 1)$$

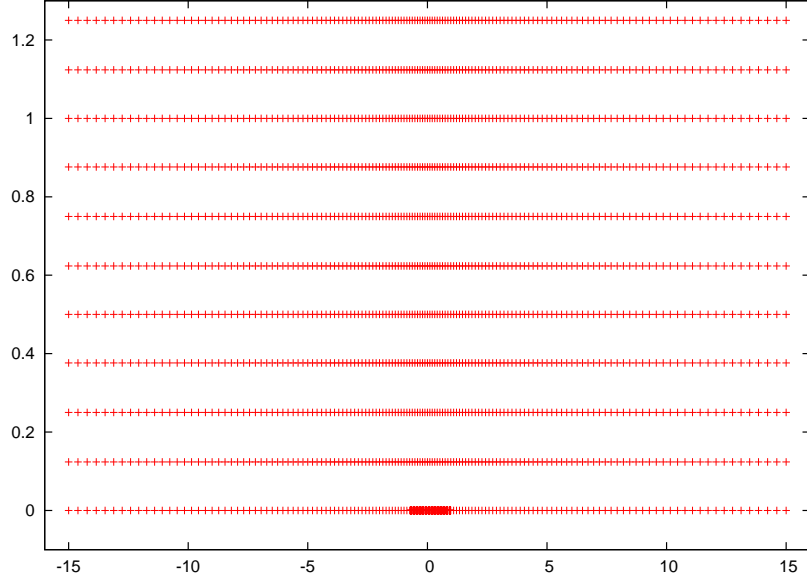
buluruz ve gerekli panel sayısı

$$N = \frac{\log(1 + L(\epsilon - 1)/a)}{\log \epsilon} \quad .$$

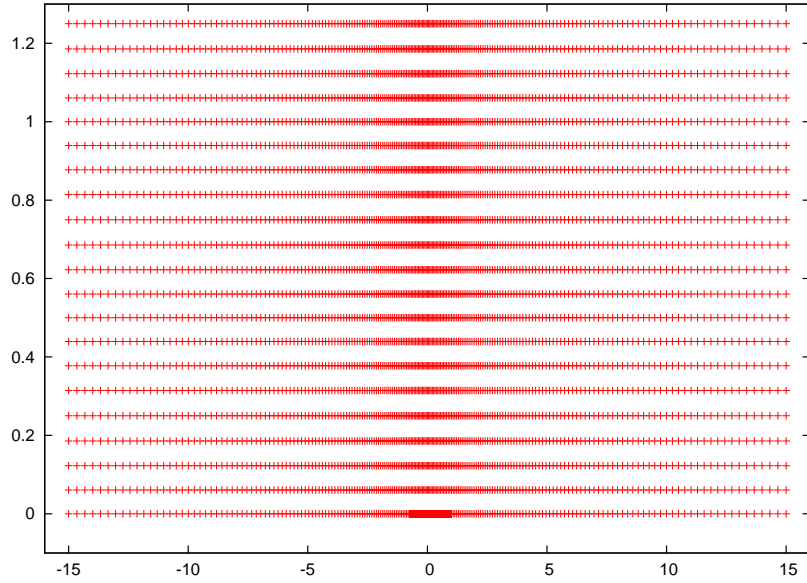
olur. Kesme işlemi (truncation) için, ayrıklaştırmada kullanılacak genliğin  $a$  tam değeri

$$a = L \frac{\epsilon - 1}{\epsilon^N - 1}$$

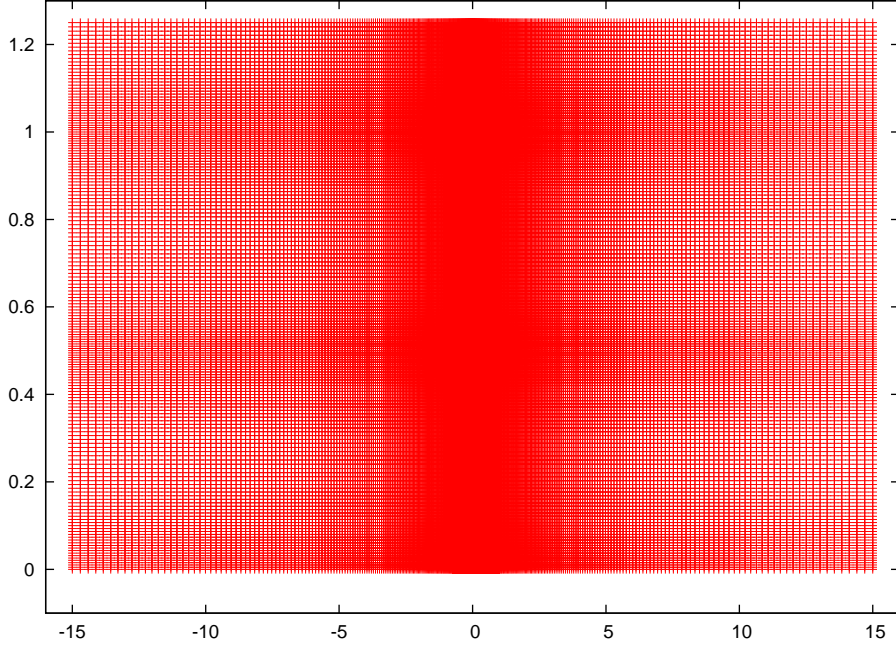
şeklinindedir. Hesaplamalarda minimum panel büyüklüğü  $a_m = 0.005$  ve büyüme faktörü  $\epsilon = 1.02$  dir. Şekil 6.1- 6.3 de  $\delta = 0.5$  olarak seçilmiş ve sırası ile farklı minimum panel büyüklükleri  $a_m = 0.1$ ,  $a_m = 0.05$  and  $a_m = 0.005$  için ayrıklaştırma örnekleri verilmiştir.



Şekil 6.1: Durum  $a_m = 0.1$ ,  $\delta = 0.5$  için kullanılan ayırıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz.



Şekil 6.2: Durum  $a_m = 0.05$ ,  $\delta = 0.5$  için kullanılan ayırıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz.

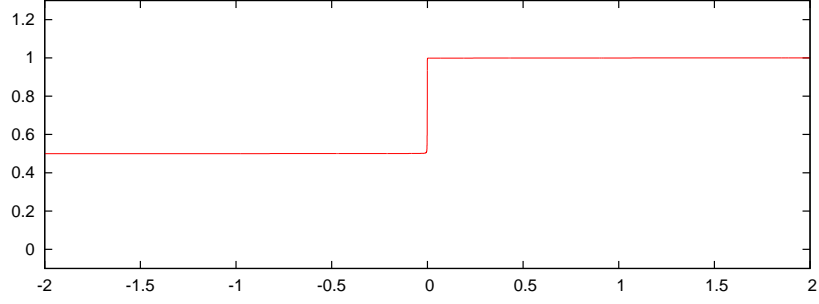


Şekil 6.3: Durum  $a_m = 0.005$ ,  $\delta = 0.5$  için kullanılan ayrıklaştırma. Yatay ve dikey eksenler için farklı bir ölçek kullanıldığına dikkat ediniz.

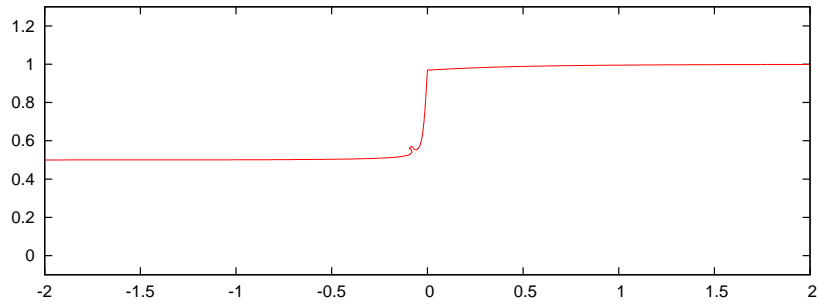
### 6.3.2 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde son zaman adımı  $t = 4$  olarak seçilip,  $\Delta t = 0.05$  olacak şekilde 80 zaman adımına bölünmüş olmasına rağmen,  $t = 1.40$  (28. adım) da iterasyon durdu. Durma sebebi, arayüzün ayrıklaştırmanın geçiş bölgesine kıyasla çok kaba olduğu bölgeye ulaşmasıdır, bu sebeple Reynolds sayısı büyür ve problem kararlı olmayan bir çözüme döndüğünden iterasyonu durdururuz. Bölgeyi daha geniş alarak ve  $\Delta t$  değerleri değiştirilerek iterasyon adım sayısı arttırılabilir. Aşağıdaki örnek  $[-15, 15]$  aralığı için CFL sayısını 1.2 seçilerek modellenmiştir. Üçüncü adımdan itibaren jet görünmeye başlamış ve yavaş yavaş büyümeye devam etmiştir. 20 zaman adımından sonra, jet'in kuyruğu incelemeye başladığından şekil 6.10'da da görüldüğü gibi küçük baloncuklar jetten ayrılmaya başlamıştır. Bu kabullere dayanarak elde edilen farklı zaman değerlerindeki nümerik çözümler aşağıdaki grafiklerde verilmiştir. Ayrıca ARDEB proje takip sistemi çoklu ortam dosyaları bölümüne, farklı yükseklik ve yer çekimi değerleri ( $g = 1$ ,  $g = 5$  ve  $g = 9.8$ ) için elde edilen çözümler avi formatında eklenmiştir.

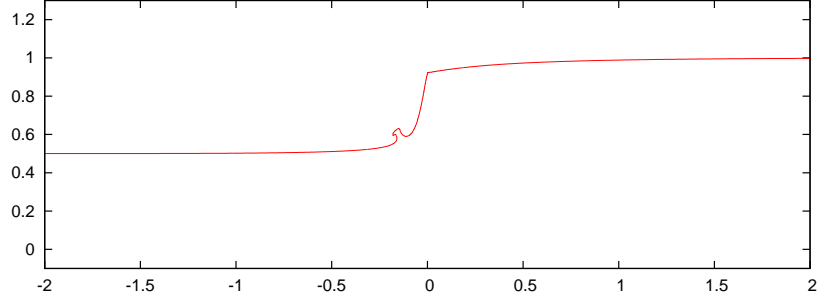




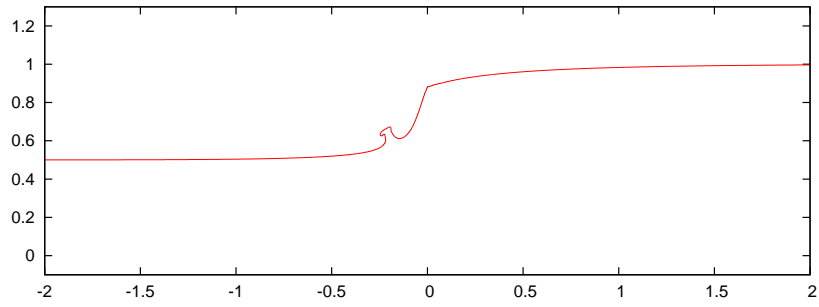
Şekil 6.4: Arayüzdeki çözümün  $t = 0.05$  anındaki davranışı



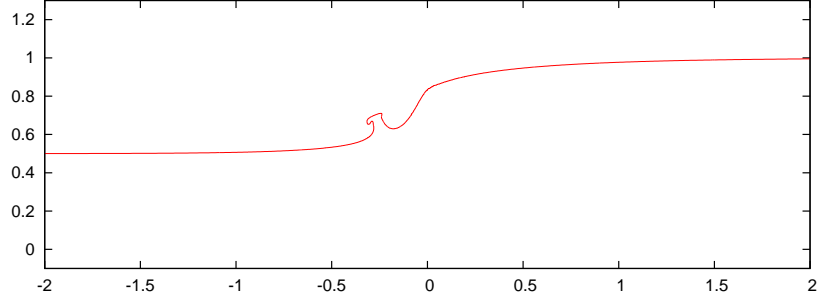
Şekil 6.5: Arayüzdeki çözümün  $t = 0.25$  anındaki davranışı



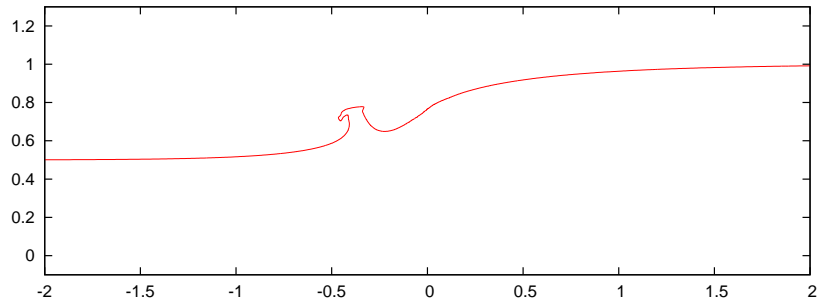
Şekil 6.6: Arayüzdeki çözümün  $t = 0.40$  anındaki davranışı



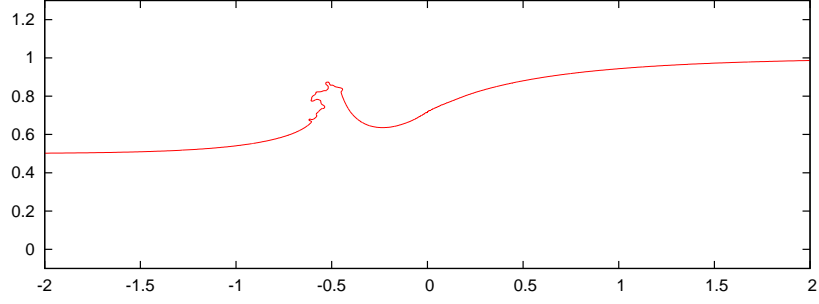
Şekil 6.7: Arayüzdeki çözümün  $t = 0.50$  anındaki davranışı



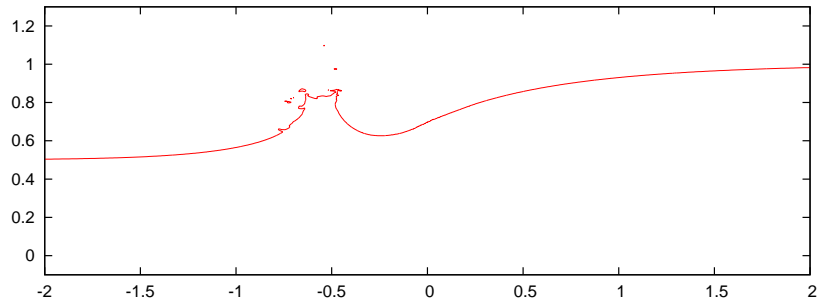
Şekil 6.8: Arayüzdeki çözümün  $t = 0.60$  anındaki davranışı



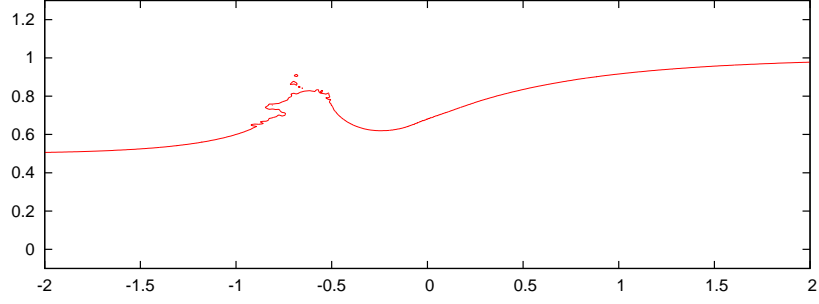
Şekil 6.9: Arayüzdeki çözümün  $t = 0.80$  anındaki davranışı



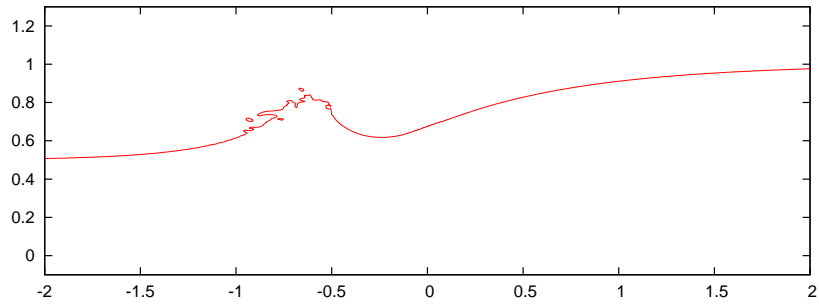
Şekil 6.10: Arayüzdeki çözümün  $t = 1.05$  anındaki davranışı



Şekil 6.11: Arayüzdeki çözümün  $t = 1.20$  anındaki davranışı



Şekil 6.12: Arayüzdeki çözümün  $t = 1.35$  anındaki davranışı



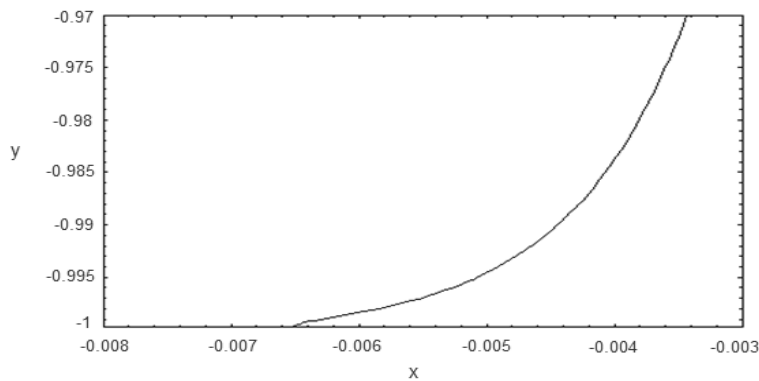
Şekil 6.13: Arayüzdeki çözümün  $t = 1.40$  anındaki davranışı

## Bölüm 7

# SONUÇLAR

**Problem Geniş Zaman Davranışı** Düz bir zeminde ıslak tabanda sıg su denklemi yardımı ile baraj yıkım probleminin uzun zaman davranışını inceledik. Farklı  $H_1$  ve  $H_2$  yüksekliklerinde hızı hesapladık ve  $\sqrt{gH_1}$  ile ölçeklenmiş hızların örtüştüğünü gördük. Buda bize maksimum hızın  $\sqrt{gH_1}$  olduğunu gösterir. Bu durumu farklı yerçekimi ivmeleri için inceledik ve gördük ki maksimum hız yine  $\sqrt{gH_1}$ . Ön dalga ( $v_{wf}$ ) hızını farklı  $H_1/H_2$  oranlarında ve farklı yerçekimi ivmelerinde hesapladık ve gördük ki ön dalga hızı ( $v_{wf}$ ), sabit  $H_1$  değeri için,  $H_2$ 'ye fazla bağlı değil ve maksimum hız yaklaşık olarak  $\sqrt{gH_1}$ 'dir. Yani dalga hızı ıslak zemindeki su yüksekliğine bağlı değil. Farklı  $H_1$  değerlerinde dalga yüksekliğini, ( $dz$ ), inceledik.  $H_1 = 1\text{m}$  için maksimum dalga yüksekliği yaklaşık olarak  $0.35\text{m}$ 'dir. Yerçekimi ivmesi  $g$ 'yi değiştirmenin fiziksel anlamı zaman skalasını değiştirmektir yani simülasyonu daha uzun zamanlarda yapmaya denk gelmektedir.

**Kuru Taban Baraj Yıkımı Akışı Probleminin Çözümü:** İki boyutlu baraj yıkımının asimtotik çözümü çalışıldı. Baraj yıkımının matematik formülasyonundan başlayarak, ana mertebe problem çözüldü ve köşe noktadaki tekillik incelendi. Bu iç çözümü gerektirdi. Serbest yüzeyin,  $\xi$ , büyük  $r$  için dış ve iç çözümlerini kıyasladık ve tablo (3.4)'den görüleceği üzere kesişim noktasının komşuluğunun küçük bir kısmında bu çözümler eşlenmektedir. Zaman  $t = 0.05366531459995$  için köşe nokta civarında serbest yüzeyin grafiğini çizdik (Şekil 7.1).



Şekil 7.1: İç ve Dış Çözümlerle beraber Fonksiyon  $\xi$

**Islak Taban Baraj Yıkımı Akışı Probleminin Fourier Serileri ile Çözümü:** Yatay hızın  $(0, \delta)$  noktasında yakınsama problemi noktanın tekil bir nokta olduğuna işaret etmektedir. Ayrıca  $(0, 0)$  noktasında yavaş yakınsama vardır. Her iki noktasında tekil olması muhtemeldir, ancak önceki daha kuvvetli tekil gözükmektedir. Katı adım ve aynı derinlikte akışkan durumları mevcut problemin limit durumları olarak elde edilememiştir.

### Sınır Eleman Yöntemi ve Fourier Serileri Yöntemiyle Kıyaslanması:

Şekil 5.1'de ( $\delta = 0.01$ ) yüksek  $\gamma$  değerleri için Fourier Serisi sonuçlarının dalgalandığını fark ederiz. Parametre  $\delta$ 'nın 0.1 ile 0.75 arasında değiştiği Şekil 5.2-5.5'de dalgalanma görmeyiz. Bunun anlamı çok küçük  $\delta$  için Fourier Serisi yönteminin yakınsama problemi yaşamamasıdır. Fourier Serisi yöntemi için bir diğer yakınsama problemi,  $\gamma = 10$  olduğudur (Şekil 5.1-5.5). Aslında  $\gamma$ 'nın çok büyük değerler alması fiziksel olarak mümkün olmayan durumlardır. Parametre  $\delta$ 'nın çok küçük olması ise kuru taban durumuna denk gelmekte ve daha önce çözülen bir problemdir. Dolayısıyla görülen dalgalanmalar önemli bir problem teşkil etmemektedir.

Parametre  $\gamma$ 'nın birden büyük değerleri için  $(0, 0)$  noktası yakınındaki yatay hız profilinin şeklinin dramatik bir şekilde değiştiğini görmekteyiz. Parametre  $\gamma < 1$  için dipteki hız profili kuru taban durumuna benzerdir; her iki sıvı da sola doğru hareket eder. Fakat  $\gamma > 1$  için sağa doğru hareket ederler. Yani  $\gamma = 1$  dip noktası  $(0, 0)$ 'daki yatay hızın davranışı için bir çatal noktasıdır (bifurcation point).

Köşe nokta için  $(0, \delta)$  ise, yatay hız, beklendiği gibi, kuvvetli tekilliktir;  $\gamma$  arttıkça tekillik kuvvetlenir (bkz bölüm 6).

Şekil 5.6-5.10'da, sağdaki akışkanın dikey hızı gösterilmiştir. Yatay hız durumunda olduğu gibi,  $\delta = 0.01$  olduğunda Fourier Serisi sonuçlarında dalgalanmalar vardır (Bkz Şek. 5.6).

**Tekillik Analizi** Şekil 6.3'den görüleceği üzere  $n$  in çift değerleri için  $D_R$  in değeri  $-0.5870$  ye yaklaşırken,  $n$  in tek değerleri için ıraksamaktadır. Bu, homojen çözümlerin varlığı ihtimalini kuvvetlendirmektedir; problemin tek bir çözümü olmayabilir. Gerçekte, katsayılar matrisinin determinanı genelde çok küçük olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 6.1 den görüldüğü üzere  $D_R$  değeri, tekil nokta  $(0, \delta)$  ya en yakın iki nokta haricinde,  $-0.5877$  civarındadır. Demek ki sayısal analizde en yakın iki nokta için yatay hızlar güvenilir değildir. Bu değer  $-0.5877$  Fourier seri çözümünden elde edilen  $-0.5870$  değeri ile uyum içerisindedir.

**İki Fazlı Akış için Sonlu Farklar Yöntemi** Problemin davranışı ile ilgili yapılan gözlemler nümerik sonuçlar kısmında verildiği gibidir. (Iafrazi, 2009)' de tek bir sıvı için hava-sıvı etkileşimi ayrıntılı olarak incelenmiş olup kullanılan metodlar referans alınmıştır. Belli bir adımdan sonra problem teklik noktasının doğası itibari ile düzensiz bir hal almaya başlamıştır. Yapılan analizler sonucunda problemin çözüldüğü bölgenin  $x$  ve  $y$  eksenleri için farklı parametreler yardımıyla ayrıklaştırılmasına ve ayrıca teklik noktasının bulunduğu bölgenin  $\delta$  komşuluğunun da ayrıklaştırma işlemi sırasında daha ince aralıklara bölünerek kararsızlık durumunun minimuma indirilmesi gerektiği kanısına varılmıştır. Bu düzenlemeler neticesinde şekil 6.10 'dan itibaren görülen kararsız durumu çözülebilecektir.

# Kaynakça

- [1] Gradshteyn, I.S. & Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, 2007.
- [2] Iafrati, A., Campana, E. F., Free-surface fluctuations behind microbreakers: space-time behaviour and subsurface flow field, *J. Fluid Mech.*, vol. 529, pp. 311-347, (2005).
- [3] Iafrati, A., Numerical study of the effects of the breaking intensity on wave breaking flows, *J. Fluid Mech.* , vol. 622, pp. 371-411, (2009).
- [4] Isıdııcı, D. The initial stages of gravity driven flows. Yüksek lisans tezi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, (2011).
- [5] Kellogg, O.D., *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, New York, (1953).
- [6] King, A.C. & Needham, D.J., The initial development of a jet caused by fluid, body and free surface interaction. Part 1. A uniformly accelerating plate, *J Fluid Mech* (1994).
- [7] Korobkin, A. & Yılmaz, O., The initial stage of dam-break flow, *J Eng Math*, 63, 293-308, (2009).
- [8] Lencina, V. L. 2007 Comparison Between 1D and 2D Models to Analyze the Dam Break Wave Using the FEM Method and the Shallow Water Equations. Master Thesis.
- [9] Mickens, R.E., *Difference Equations Theory and Applications*, Chapman-Hall, New York, (1990). Pp.56-57.
- [10] Penney, W.G. & Thornhill, C. K. The dispersion, under gravity, of a column of fluid supported on a rigid horizontal plane. *Phil Trans Roy Soc London A*, 244, 285-311, (1952).
- [11] Pohle, F.V. *The Lagrangian equations of hydrodynamics: solutions which are analytic functions of time*. Doktora tezi. New York Üniversitesi, (1950).
- [12] Ritter, A. 1892 Die fortpflanzung der wasserwellen. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*. 36:947-954.
- [13] Stoker, J.J., *Water Waves*, Interscience publishers, (1957).
- [14] Tikhonov, A.N. & Samarskii, A.A., *Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press, 1963.
- [15] Zang, Y., Street, R. L. & Koseff, J. R., A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *J. Comput. Phys.* 114, 18-33, (1994).



## **Ekler**

Level-Set yöntemi için yapılan analizler (farklı değişkenler  $H = 1$ ,  $\Delta = 0.3, 0.5, 0.7$  ve  $H = 2$ ,  $\Delta = 0.5, 1.0, 1.5$  yükseklikleri için farklı yer çekimi sabitleri ile) ARDEB proje takip sistemi çoklu ortam dosyaları bölümüne avi formatında eklenmiştir.

**TÜBİTAK**  
**PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

<b>Proje No:</b> 111M209
<b>Proje Başlığı:</b> Akışkan-Yapı Etkileşimi Problemlerinde Birleşik Sayısal/Asimtotik Algoritmalar: Baraj Yıkımı ile Oluşan Akış ve Diğer Uygulamalar
<b>Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar:</b> Oğuz Yılmaz, Alexander Korobkin, Alessandro Iafrati, Ali İhsan Nesli Türk
<b>Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:</b> İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Gülbahçe Kampüsü, Urla, İzmir, 35430.
<b>Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:</b> Tübitak, Ankara.
<b>Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:</b> 15 Ekim 2011 - 15 Ocak 2014
<b>Öz (en çok 70 kelime)</b> <p>Plaka ile birbirinden ayrılmış, birbirine karışmayan farklı derinlik ve yoğunluklardaki iki sıvının, plakanın aniden çekilmesiyle oluşan, impulsif hareketi projenin konusudur.</p> <p>Projede jet formasyonunun asimtotik ve sayısal olarak modellenmesi gerçekleştirilmektedir. Her iki sıvının serbest yüzeylerinin bulunduğu köşe nokta matematiksek bir tekil noktadır. Bu noktanın tekilliğinin kuvvet tekilliği olduğu ve mertebesinin ise sıvıların yoğunluklarının oranına bağlı olduğu bulunmuştur.</p> <p>Ayrıca, baraj yıkımı ile oluşan akışın uzun zaman davranışı sonlu farklar yöntemi ile modellenmiştir.</p>
<b>Anahtar Kelimeler:</b> Baraj Yıkımı Akışı, Asimtotik Yöntemler, Sonlu Elemanlar Yöntemi
<b>Fikri Ürün Bildirim Formu</b> Sunuldu mu? Evet <input type="checkbox"/> Gerekli Değil <input checked="" type="checkbox"/> <small>Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.</small>
<b>Projeden Yapılan Yayınlar:</b> <p>1) Yılmaz, O., Korobkin, A., Iafrati, A. The initial stage of dam-break flow of two immiscible fluids. Linear analysis of global flow, <i>Applied Ocean Research</i> 42, 60-69 (2013).</p>