

KAFES İNDİRGEME DESTEKLİ MIMO SEZİCİLERİN PERFORMANS ANALİZİ

PERFORMANCE ANALYSIS OF LATTICE REDUCTION AIDED MIMO DETECTORS

Kağan Kılıçaslan, Mustafa A. Altinkaya

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü
kagankilicaslan,mustafaaltinkaya@iyte.edu.tr

ÖZETÇE

Kafes indirgeme, kablosuz çok giriş-çok çıkışlı (MIMO) sistemlerin sezim ve ön-kodlamalarında kullanılan etkili bir yöntemdir. Temel düşünce, kanal transfer matrisini gönderilen sembollerin tabanı olarak kabul etmektir. Kanal transfer matrisi, kafes indirgeme algoritmaları kullanılarak dikgenliğe daha yakın bir matrise indirgenir. Bu ise, geleneksel MIMO alıcıların performansını iyileştirir. Bu çalışmada, bu performans iyileşmesinin modülasyon derecesine bağlı olduğu gösterilmiştir.

ABSTRACT

Lattice reduction is a powerful method used in detection and precoding of wireless multiple input-multiple output (MIMO) systems. The basic idea is to consider the channel transfer matrix as a basis for the transmitted symbols. The channel transfer matrix is reduced to a more orthogonal matrix using lattice reduction algorithms. This in turn, improves the performance of conventional MIMO receivers. In this study, it is shown that this performance improvement depends on the modulation order.

1. GİRİŞ

Çok giriş-çok çıkışlı (MIMO) kablosuz haberleşme sistemleri sağladıkları yüksek veri hızları [1] nedeniyle günümüz teknolojilerinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu sistemlerde en büyük olabilirlik sezicisi en iyi çözümü verirken, işlemsel karmaşıklığı nedeniyle pratik sistemlerde tercih edilmemektedir. En büyük olabilirlik sezicisinin yerine kullanılan doğrusal sezicilerin de performans açısından dezavantajları vardır. Özellikle kötü koşullu kanal matrisleri için doğrusal sezicilerin performansı oldukça düşmektedir. Optimum sezici ile doğrusal seziciler arasındaki performans açığını kapatmak için kafes indirgeme kullanılması önerilmiştir [2-4].

Kafes indirgeme, küresel konumlama sistemleri, frekans kestirimi, JPEG görüntülerde renk uzayı kestirimi ve özellikle kablosuz haberleşme sistemlerinde sezim ve önkodlama gibi pek çok alanda karşılaşılan problemlerin çözümünde kullanılan bir yöntemdir [5]. Kablosuz haberleşme sistemlerinde kafes indirgeme, MIMO kanal matrisini dikgene daha yakın ve daha kısa taban vektörleriyle ifade edilebilen eşdeğer bir kanal matrisi elde etme amacıyla kullanılır. Elde edilen eşdeğer kanal matrisinin sezim için kullanılması daha az işlemsel karmaşıklık ile en iyiye daha yakın performans elde edilmesine olanak sağlamaktadır.

Bu çalışmada kafes indirgeme destekli sezicilerin sağladığı kazancın artan modülasyon derecesinden nasıl etkilendiği araştırılmıştır. Bölüm 2’de kullanılan sistem modeli açıklanırken, Bölüm 3’te geleneksel doğrusal MIMO seziciler hakkında bilgi verilmiştir. Bölüm 4’te kafes indirgeme kavramı açıklandıktan sonra, Bölüm 5’te kafes indirgemenin doğrusal sezicilerle birlikte kullanımına yer verilmiştir. Bölüm 6’da yer alan benzetimlerin sonuçlarının ardından, Bölüm 7’de vargilar anlatılmaktadır.

2. SİSTEM MODELİ

Bu çalışmada $N \geq M$ olmak üzere N adet alıcı ve M adet vericiden oluşan, uzamsal çoğullama kullanılmış bir MIMO sistemi incelenmiştir. Uzamsal çoğullama ile oluşturulan veri dizgisi verici anten sayısı kadar alt-dizgiye bölünerek, bir zaman diliminde gönderilen sembol sayısı artırılmakta ve bunun sonucu olarak sistemin veri hızı artmaktadır [6]. Alıcı tarafında elde edilen $N \times 1$ boyutlu vektör

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada \mathbf{s} , bu sistemde bir zaman diliminde gönderilen $M \times 1$ boyutlu data vektörünü, \mathbf{n} alıcılara etki eden $N \times 1$ boyutlu beyaz gürültüyü; \mathbf{H} ise bağımsız, özdeğ dağılımlı, sıfır ortalamalı ve birim varyanslı karmaşık Gauss katsayılarından oluşan $N \times M$ boyutlu kanal transfer matrisini göstermektedir. Kanal düz sönümlenmeli varsayılmış ve kanal transfer matrisi çerçeve süresince sabit kalırken çerçeveler arasında bağımsız olarak değiştiği kabul edilmiştir. Aynı zamanda kanal transfer matrisi bilgisi alıcı tarafında bilinirken, verici tarafında mevcut değildir.

Karmaşık elemanlı matrisler kullanarak modellediğimiz bu sistemin gerçek elemanlı denk sistemi de, $\Re\{\cdot\}$ ve $\Im\{\cdot\}$ argümanının sırasıyla gerçel ve sanal kısmını göstermek üzere

$$\begin{pmatrix} \Re\{\mathbf{y}\} \\ \Im\{\mathbf{y}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re\{\mathbf{H}\} & -\Im\{\mathbf{H}\} \\ \Im\{\mathbf{H}\} & \Re\{\mathbf{H}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re\{\mathbf{s}\} \\ \Im\{\mathbf{s}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Re\{\mathbf{n}\} \\ \Im\{\mathbf{n}\} \end{pmatrix} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3. GELENEKSEL MIMO SEZİCİLER

Verilen sistem modeli için en iyi sezici olan en büyük olabilirlik (ML, Maximum Likelihood) sezicisi

$$\hat{\mathbf{s}}_{ML} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \quad (3)$$

probleminin çözümünü arar.

Burada \mathcal{S} olası bütün sembollerin oluşturduğu sembol alfabetini ifade etmektedir. Yüksek modülasyon derecelerinde ve anten sayılarında (3) probleminin işlemsel karmaşıklığı oldukça fazladır. Bu nedenle pratik uygulamalarda sıfıra zorlamalı (ZF, Zero-Forcing) sezici ve en küçük ortalama karesel kata (MMSE, Minimum Mean Square Error) sezicisi gibi alt-en iyi seziciler kullanılmaktadır [7].

3.1. Sıfıra-Zorlamalı Sezici

Sıfıra-zorlamalı sezicide amaç, alıcı tarafında elde edilen işaret üzerindeki kanal etkisini ortadan kaldırmaktır. Bunun için alınan vektör kanal transfer matrisinin sözde-terisi olarak tanımlanan $\mathbf{H}^+ = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$ matrisiyle çarpılır:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ZF} = \mathbf{H}^+ \mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{H}^+ \mathbf{n} = \mathbf{s} + \mathbf{w} \quad (4)$$

Bu işlem sonunda elde edilen $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$ değerleri nicemleme yapılarak sembol alfabetinin en kısa uzaklığa sahip elemanı ile eşlenir ve gönderilen sembol sezilmiştir olur:

$$\hat{s}_{ZF} = \underset{s \in \mathcal{S}}{\text{arg min}} |\hat{\mathbf{x}}_{ZF} - s| \quad (5)$$

Dikgen kanal matrisleri için sıfıra-zorlamalı sezim, en büyük olabilirlik sezicisi ile eşdeğerdir. Ancak genel olarak eklenir gürültünün yükseltilmesine neden olur.

3.2. En Küçük Ortalama Karesel Hata Sezicisi

En küçük ortalama karesel hata sezicisi, gürültü varyansını da göz önüne alarak performansı artırır. Giriş-çıkış ilişkisi

$$\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{M \times M})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y} \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir. Nicemleme basamağı (5) ile aynıdır. MMSE sezicisi, kanal matrisi ve alınan vektör

$$\mathbf{H}_{gen} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sigma_n \mathbf{I}_{M \times M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{gen} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

şeklinde genişletilerek tanımlanıp, (1)'de verilen sistem modelinde \mathbf{H} ve \mathbf{y} yerine \mathbf{H}_{gen} ve \mathbf{y}_{gen} kullanıldığında sıfıra zorlamalı sezici ile denk olur [8].

4. KAFES İNDİRGEME

Kafes indirgemenin amacı, kafesi geren taban vektörlerinden daha kısa ve daha dikgen taban vektörleri elde etmektir. Gerçek değerli kanal transfer matrisinin sütunlarını $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ kafesinin taban vektörleri kabul edelim. Bu durumda,

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{T} \quad (8)$$

olarak tanımlanan dönüştürülmüş matrisin \mathbf{H} matrisi ile aynı kafesi oluşturduğunu söyleyebilmemiz için \mathbf{T} dönüşüm matrisinin unimodüler olması gerekmektedir [5]. Bir başka deyişle, \mathbf{T} matrisi sadece tam sayı elemanlardan oluşabilir ve determinanı 1 ya da -1 olmalıdır. Bu koşulu sağlayan bir \mathbf{T} matrisi temel sütun işlemlerini ifade eder ve terslenebilir. Elimizdeki \mathbf{H} matrisini daha dikgen taban vektörlerine sahip yeni bir $\tilde{\mathbf{H}}$ matrisine dönüştüren \mathbf{T} matrisini bulmak ise, kafes indirgeme yöntemleriyle mümkün olur.

4.1. LLL Algoritması

LLL algoritması [9] kafes indirgeme problemini boyut indirgeme ve sütun değiştirme kullanarak çözen, yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir:

$$|\mu_{i,j}| \leq 1/2 \text{ for } 1 \leq j < i \leq N_t, \quad \mu_{i,j} = \frac{(\mathbf{h}_i, \bar{\mathbf{h}}_j)}{\|\bar{\mathbf{h}}_j\|^2} \quad (8)$$

$$\|\bar{\mathbf{h}}_i + \mu_{i,i-1} \bar{\mathbf{h}}_{i-1}\|^2 \geq \delta \|\bar{\mathbf{h}}_{i-1}\|^2 \quad (9)$$

for $1 < i \leq N_t$

Bu eşitsizliklerde $\bar{\mathbf{H}} = (\bar{\mathbf{h}}_1, \dots, \bar{\mathbf{h}}_{N_t})$ matrisi, \mathbf{H} matrisinin Gram-Schmidt yöntemiyle dikgenleştirilmiş halidir. N_t , \mathbf{H} matrisinin sütun sayısı; δ ise, $(1/4, 1)$ aralığında indirgenmiş tabanların dikgenliğini belirleyen, 1'e yaklaştıkça işlemsel karmaşıklığın artmasına sebep olan bir parametredir. (8) ve (9) eşitsizlikleri sağlanana kadar boyut indirgeme ve sütun değiştirme işlemleri devam eder.

LLL algoritmasında, \mathbf{H} matrisi $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ şeklinde ayrıştırılarak da kullanılabilir [8]. Bu durumda \mathbf{Q} birimlik N adet sütun vektörden oluşan $N \times N$ boyutlu bir matris, \mathbf{R} ise üstteki $M \times M$ 'lik bölümü üst üçgen bir matrisden oluşup geri kalan $(N - M)$ satırı sıfır vektörleri ile doldurulmuş $N \times M$ boyutlu bir matristir.

5. KAFES İNDİRGEME DESTEKLİ SEZİM

Doğrusal sezim yöntemlerinin performansı kanal transfer matrisinin özelliklerine sıkıca bağlıdır. Bu nedenle sezicide doğrudan \mathbf{H} matrisi yerine, daha dikgen hale dönüştürülmüş (8)'de verilen $\tilde{\mathbf{H}}$ matrisini kullanmak daha iyi sonuç vermektedir. Dönüştürülmüş data vektörünü $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{s}$ olarak tanımlarsak, kafes indirgeme yapıldıktan sonraki sistem modeli

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \mathbf{s} + \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{z} + \mathbf{n} \quad (10)$$

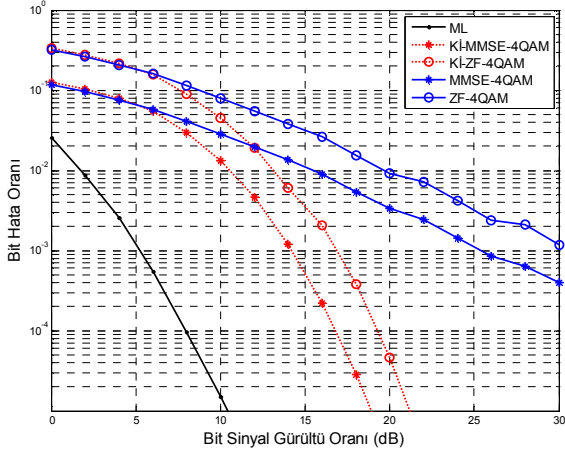
olarak tekrar yazılabilir.

Bu durumda $\mathbf{H}\mathbf{s}$ ve $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z}$ aynı kafes noktasını tanımlar. Fakat $\tilde{\mathbf{H}}$ matrisinin sütunları, \mathbf{H} matrisinin sütunlarıyla kıyaslandığında dikgenliğe daha yakın olduğu için alıcıda elde edilen işaret sözde-terisiyle denkleştirildiği zaman (4)'te verilen geleneksel sıfıra-zorlamalı seziciye göre gürültünün daha az yükseltilmesine neden olur. Denkleştirme ve nicemleme basamaklarından sonra sezicide $\hat{\mathbf{z}}$ elde edilir. Bu aşamada $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}$ işlemi ile orijinal sembol uzayına geri dönülür.

En küçük ortalama karesel hata sezicisinde ise kafes indirgeme işlemi (7)'de verilen genişletilmiş \mathbf{H}_{gen} matrisi için yapılır [8]. Bu durumda \mathbf{H}_{gen} matrisi, \mathbf{H} matrisine göre daha dikgen olduğundan işlemsel karmaşıklık daha azdır.

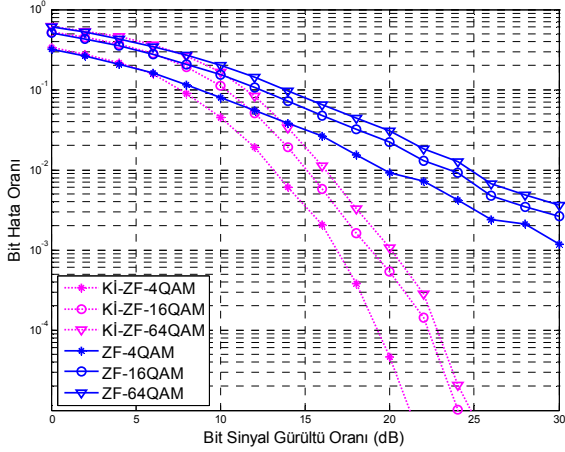
6. BENZETİM ÇALIŞMALARI

Bu çalışmada 4 alıcı ve 4 vericiden oluşan bir MIMO sistemin geleneksel ve kafes destekli sezicilerde gösterdiği bit hata oranı performansı, farklı QAM modülasyon dereceleri kullanarak incelenmiştir. Her bir sezicinin bit hata oranı (BHO) performansı farklı bit sinyal gürültü oranları (BSGO) için 1000 defa hesaplanmış ve ortalaması alınmıştır.



Şekil 1: 4QAM için kafes indirgeme destekli ve geleneksel seziciler için BHO'nun BSGO'ya bağlı değişimi

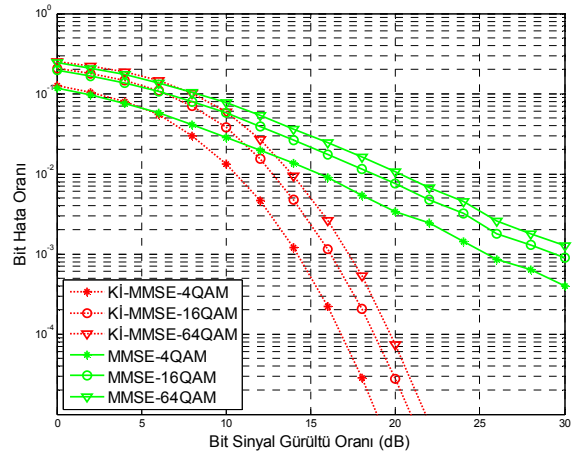
Şekil 1'de 4QAM modülasyonu için geleneksel sezicilerle kafes destekli sezicilerin BHO performansları BSGO'ya bağlı olarak gösterilmiştir. MMSE sezici, gürültü varyansını genişletilmiş kanal matrisi ile sistem modeline dahil ettiği için ZF seziciye göre daha iyi sonuç vermektedir. Kafes indirgeme desteği her bir geleneksel seziciye BSGO kazancı sağlamaktadır. Bu kazanç sıfıra zorlamalı sezicide MMSE sezicisine kıyasla daha fazladır. Kafes indirgeme desteğinin 4QAM modülasyonunda MMSE sezici için 8dB, ZF sezici için ise 10dB gerisinde kalsalar bile, bu sezicilerin en büyük olabilirlik sezicisine paralel bir BSGO-BHO davranışı kazanmalarını sağladığı görülmektedir.



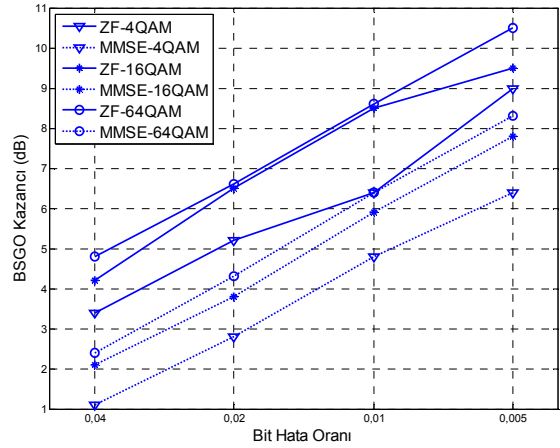
Şekil 2: Kafes indirgeme destekli ve geleneksel ZF sezici için BHO'nun BSGO'ya bağlı değişimi

Kafes indirgeme destekli sezim, işaret kümesini sonsuz boyutlu bir kafes olarak ele almaktadır. Bu nedenle işaret kümesi genişledikçe kafes indirgeme destekli sezicilerin performansının en büyük olabilirlik sezicisine yaklaştığı daha önce ifade edilmiştir [4]. Şekil 2 ve 3'te sırasıyla sıfıra zorlamalı ve MMSE sezicilerinin kafes indirgeme destekli ve geleneksel sürümlerinin farklı modülasyon dereceleri için BHO performansları, BSGO'ya bağlı olarak gösterilmektedir.

Kafes indirgeme destekli sezicinin sağladığı kazanç, düşük dereceli modülasyonlarda, daha düşük sinyal gürültü oranlarında elde edilmektedir. Ayrıca 4QAM ile 16QAM modülasyonlarındaki kazanç farkı, 16QAM ile 64QAM modülasyonları arasındaki kazanç farkına göre daha fazladır. Farklı modülasyon derecelerinde ve sezicilerde elde edilen kazanç, Şekil 4'te daha açık bir şekilde görülmektedir. Modülasyon derecesi arttıkça kafes indirgemeye elde edilen kazançta da artış gözlenmektedir. Şekil 4'te grafiksel olarak verilen BSGO kazançları nümerik değerlerin karşılaştırılmalarını kolaylaştırmak amacıyla Tablo 1'de verilmiştir. Her bir modülasyonda kafes indirgemenin sıfıra zorlamalı sezicide MMSE sezicisine oranla 2dB'den daha fazla BSGO kazancı sağladığı görülmektedir.



Şekil 3: Kafes indirgeme destekli ve geleneksel MMSE sezici için BHO'nun BSGO'ya bağlı değişimi



Şekil 4: Kafes indirgemenin sağladığı BSGO kazancının BHO'ya bağlı değişimi

7. VARGILAR

Kafes indirgeme desteğinin işlem yükü azlığı nedeniyle en büyük olabilirlik sezicisine tercih edilen, daha düşük performanslı sıfıra zorlamalı sezici ve MMSE sezicilerinin performanslarını geliştirdiği bilinmekteydi. Bu çalışmada ise, kafes indirgemeye sağlanan kazancın modülasyonun

derecesinin artmasına paralel olarak yükseldiği gösterilmiştir. Bu artışın nedeninin artan modülasyon derecesi ile birlikte kafesteki ortalama komşu adedinin artması olduğu düşünülmektedir.

Günümüzde kullanılan pratik sistemlerin ihtiyaç duyduğu daha az hata oranları ve bu sistemlerde genellikle tercih edilen yüksek dereceli modülasyonlarda, kafes indirgeme destekli seziciler kullanılarak belirgin bir kazanç sağlanabileceği açıktır.

Tablo 1: Kafes İndirgemeyle Elde Edilen SNR Kazançları (dB)

		Bit Hata Oranı			
		0,04	0,02	0,01	0,005
4QAM	ZF	3,4	5,2	6,4	9
	MMSE	1,1	2,8	4,8	6,4
16QAM	ZF	4,2	6,5	8,5	9,5
	MMSE	2,07	3,8	5,9	7,8
64QAM	ZF	4,8	6,6	8,6	10,5
	MMSE	2,4	4,3	6,4	8,3

8. KAYNAKÇA

- [1] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless personal communications*, vol. 6, pp. 311-335, 1998.
- [2] W. H. Mow, "Universal lattice decoding: Principle and recent advances," *Wireless Communications and Mobile Computing*, vol. 3, pp. 553-569, 2003.
- [3] D. Wubben, R. Bohnke, V. Kuhn, and K. D. Kammeyer, "Near-maximum-likelihood detection of MIMO systems using MMSE-based lattice reduction," in *Communications, 2004 IEEE International Conference on*, 2004, pp. 798-802.
- [4] H. Yao and G. W. Wornell, "Lattice-reduction-aided detectors for MIMO communication systems," in *Global Telecommunications Conference, 2002*, 2002, pp. 424-428.
- [5] D. Wubben, D. Seethaler, J. Jaldén, and G. Matz, "Lattice Reduction," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 28, pp. 70-91, 2011.
- [6] A. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore, *Introduction to space-time wireless communications*: Cambridge Univ Pr, 2003.
- [7] B. Daneshrad, "A comparative study of MIMO detection algorithms for wideband spatial multiplexing systems," in *Wireless Communications and Networking Conference, 2005 IEEE* 2005, pp. 408-413 Vol. 1.
- [8] D. Wubben, R. Bohnke, V. Kuhn, and K. D. Kammeyer, "MMSE-based lattice-reduction for near-ML detection of MIMO systems," in *Smart Antennas, 2004. ITG Workshop on* 2004, pp. 106-113.
- [9] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, and L. Lovász, "Factoring polynomials with rational coefficients," *Mathematische Annalen*, vol. 261, pp. 515-534, 1982.