

Klasik Parametrik Olmayan Spektrum Kestirim Tekniklerini Gürbüzleştirmek için Bir Yöntem

A Method for Robustifying Classical Nonparametric Spectral Estimation Techniques

Osman Tayfun Bişkin
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü
İzmir, Türkiye
tayfunbisikin@iyte.edu.tr

Olca Akay
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Dokuz Eylül Üniversitesi
İzmir, Türkiye
olcay.akay@deu.edu.tr

Özetçe— Bu çalışmada, Gauss dağılımına sahip olmayan ortamlar için gürbüz parametrik olmayan spektrum kestirim yöntemleri önerilmektedir. Bu amaca yönelik olarak, örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisinden (spatial sign covariance matrix) elde edilen özilinti fonksiyonu kestiricisi (autocorrelation function estimator), periyodogram ve Blackman-Tukey gibi klasik spektrum kestirim yöntemleriyle birlikte kullanılmaktadır. Klasik spektrum kestirim yöntemleri ile bu çalışmada önerilen gürbüz yöntemler hem Gauss dağılımına hem de Gauss olmayan kuyruklu (heavy-tailed) dağılıma sahip birer olasılıksal süreç altında denenerek performansları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, önerilen gürbüz parametrik olmayan spektrum kestirim yöntemlerinin Gauss dağılımına sahip olmayan ortamlar için klasik yöntemlere nazaran daha iyi performans sergileyebildiklerini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler — Gürbüz kestirim, parametrik olmayan spektrum kestirimi, örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisi, kuyruklu dağılımlar.

Abstract— In this study, robust nonparametric spectral estimation methods for non-Gaussian environments are proposed. For this aim, the autocorrelation function estimator obtained from sample spatial sign covariance matrix is used together with classical nonparametric spectral estimation methods such as periodogram and Blackman-Tukey. Performances of classical spectral estimation methods and robust methods suggested in this study are compared by applying them to one Gaussian process and one non-Gaussian heavy-tailed stochastic process. The results obtained show that, for non-Gaussian environments, the proposed robust nonparametric spectral estimation methods could perform better compared to the classical methods.

Keywords — Robust estimation, nonparametric spectral estimation, sample spatial sign covariance matrix, heavy-tailed distributions.

I. GİRİŞ

Günümüzde pek çok mühendislik problemi için önerilen çözüm yöntemleri bir takım ön kabulleri temel olarak geliştirilmişlerdir. Bu ön kabullerin başında verilerin elde edildiği ortamdaki gürültünün Gauss dağılımına sahip olması gelmektedir. Bu sayede optimum kestirimler için analitik çözümler bulunabilmektedir. Öte yandan, günümüzde mühendisliğin birçok alanında, elde edilen ölçümlerdeki dağılımın kuyruklu (heavy-tailed) yapıda olmasına neden olan aykırı gözlemler (outliers) nedeniyle o gözleme ait ölçümlerin Gauss dağılımından uzak olduğu görülmektedir [1]. Bu durumlarda, gözlemlerin Gauss dağılımına sahip olduğu ön kabulünü temel olarak türetilen yöntemlerin performanslarında önemli oranda düşüşler gözlemlenmektedir. Dolayısıyla Gauss olmayan, aykırı gözlem içeren kuyruklu yapıya sahip dağılımlar için farklı yöntemlerin türetilmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Literatürde bu tür yöntemler genelde gürbüz kestirim (robust estimator) yöntemleri olarak isimlendirilmektedir. Burada gürbüzlükle kastedilen istatistiksel dayanıklılıktır ve dağılımlar için temel alınan ön kabullerin dışında kalan sapmaların üstesinden gelme anlamındadır [1]. Parametrik olmayan spektrum kestirim yöntemleri pratik, az işlem yüküne sahip ve, en önemlisi, sinyal hakkında herhangi bir ön bilgi olmadığında kullanılabilecek yöntemlerdir [2]. Ancak, bu yöntemlerin performansları, Gauss dağılımına sahip olmayan gürültülü ortamlarda düşmektedir. Dolayısıyla bu çalışmada Gauss dağılımına sahip olmayan ortamlar için gürbüz parametrik olmayan spektrum kestirim yöntemleri önerilmektedir.

Literatürde, Gauss olmayan dağılıma sahip ortamlarda spektrum kestirimi yapabilmek için önerilmiş çeşitli gürbüz kestirim yöntemleri yer almaktadır. Bunlardan bir kısmında aykırı gözlemler filtre kullanılarak ayıklanma yoluna gidilmiş [3] - [7], bir kısmında ise gürbüz özilinti matrisi

(robust autocorrelation matrix) standart özilinti matrisi ile yer değiştirmiştir [8], [9]. Bunların dışında, periyodogramın regresyon formülasyonundaki en küçük kareler (least-squares) ölçütünü L_p -norm ölçütü ile değiştirerek L_p -norm periyodogram olarak adlandırılan yeni bir yöntem öneren çalışmalar da mevcuttur [3].

Bu çalışmada, sinyal ve gürültü alt uzaylarını kullanarak gürbüz frekans kestirimi yapabilmek için [9]'da önerilen ve standart özilinti matrisinin yerine kullanılan örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisinden (spatial sign covariance matrix) yararlanılarak, periyodogram ve Blackman-Tukey gibi parametrik olmayan klasik spektrum kestirim yöntemlerinin gürbüzleştirilmesi için yeni bir yöntem önerilmektedir.

II. METOT

Geniş anlamda durağan (WSS) bir olasılıksal süreç $x[n]$ için, parametrik olmayan klasik spektrum kestirim yöntemleri arasında yer alan periodogram ve Blackman-Tukey spektrum kestirim yöntemlerinin tanımları sırasıyla Denklem (1) ve (2)'de verilmiştir. Denklem (2)'de $w[k]$ Bartlett (üçgen) penceresidir [2]. Denklem (1) ve (2)'de yer alan $\hat{r}_{xx}[k]$ ise yanlı özilinti fonksiyonu kestiricisi (biased autocorrelation function estimator) olup Denklem (3)'te tanımlanmıştır [2].

$$\hat{P}_{Per}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}[k] e^{-j2\pi fk} \quad (1)$$

$$\hat{P}_{BT}(f) = \sum_{k=-M}^M w[k] \hat{r}_{xx}[k] e^{-j2\pi fk} \quad (2)$$

$$\hat{r}_{xx}[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]x[n+k] & k=0,1,\dots,N-1 \\ \hat{r}_{xx}^*[-k] & k=-(N-1),-(N-2),\dots,-1 \end{cases} \quad (3)$$

Gürbüz çok kanallı kestirim ve filtreleme için gürbüz ortak değişinti matrisinin kestirimi önemli ve kilit konumdadır. Gürbüz ortak değişinti matrisinin, S-kestirimi, M-kestirimi, MM-kestirimi ve τ -kestirimi gibi çeşitli kestirim yöntemleri vardır [1]. Bu çalışmada, veriye ait ortak değişinti matrisi, örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisi kullanılarak hesaplanmıştır.

Öncelikle, $K \times 1$ boyutlu $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N \in \mathbb{C}^K$ vektörleri ile temsil edilen çok kanallı veri için $K \times K$ standart örnek ortak değişinti matrisi (sample covariance matrix)

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{z}_n - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{z}_n - \hat{\boldsymbol{\mu}})^H \quad (4)$$

şeklinde hesaplanabilir. Yukarıda, $(\cdot)^H$ Hermitian işlemini göstermektedir. $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ örnek ortalama (sample mean) olup aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{z}_n \quad (5)$$

Eğer çok kanallı veri, $\mathbf{z}_n \in \mathbb{C}^K$, Gauss dağılıma sahip olmayan bir ortamdan elde edilmişse Denklem (4)'te verilen örnek ortak değişinti matrisi yerine gürbüz ortak değişinti matrisini kullanmak kestirimlerde daha iyi sonuç vermektedir. Örneğin, [9]'da alt uzay spektrum kestirimi metotlarında, standart ortak değişinti matrisi yerine gürbüz kestirim yapabilmek için örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisi kullanılmıştır. Bu çalışmada da, Gauss dağılıma sahip olmayan veriler için örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisinden yararlanılarak gürbüz parametrik olmayan spektrum kestirimi önerilmektedir. $K \times 1$ boyutlu \mathbf{z} vektörü için uzamsal işaret (spatial sign) fonksiyonu $\mathbf{S}(\mathbf{z})$ aşağıdaki şekilde tanımlanır [1], [9],

$$\mathbf{S}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}, & \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6)$$

Yukarıda, $\|\mathbf{z}\| = (\mathbf{z}^H \mathbf{z})^{1/2}$ olarak verilmiştir. x_1, \dots, x_n zaman serisi için, $K \times K$ örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisi

$$\hat{\Sigma}_1 = \frac{1}{N-K+1} \sum_{n=1}^{N-K+1} \mathbf{S}(\mathbf{z}_n) \mathbf{S}^H(\mathbf{z}_n) \quad (7)$$

olarak tanımlanır. Denklem (7)'de $\mathbf{z}_n; x_1, \dots, x_n$ zaman serisinin elemanları kullanılarak

$$\mathbf{z}_n = [x_n, \dots, x_{n+K-1}]^T, \quad n = 1, \dots, N-K+1 \quad (8)$$

Bu çalışmada, Gauss olmayan ortamlarda gürbüz parametrik olmayan spektrum kestirim yöntemleri için Denklem (1) ve (2)'de yer alan yanlı özilinti fonksiyonu kestiricisi, Denklem (4)'de yer alan standart ortak değişinti matrisi yerine, Denklem (7)'deki örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisinden elde edilmektedir. Daha sonra, bu yeni gürbüz özilinti fonksiyonu kestiricisi Denklem (1) ve (2)'de kullanılarak gürbüz parametrik olmayan spektrum

kestirimi yapılmaktadır. Bunun için, yeni gürbüz özilinti fonksiyonu kestiricisi, örnek uzamsal işaret ortak değişinti matrisinden aşağıda açıklandığı şekilde elde edilmektedir. Öncelikle $n = 1, 2, \dots, N - K + 1$ aralığında seçilen bir m

değeri için, Denklem (7)'de geçen $\mathbf{S}(\mathbf{z}_m)\mathbf{S}^H(\mathbf{z}_m) = \frac{\mathbf{z}_m\mathbf{z}_m^H}{\|\mathbf{z}_m\|^2}$

ifadesi, Denklem (8) kullanılarak oluşturulur,

$$\frac{\mathbf{z}_m\mathbf{z}_m^H}{\|\mathbf{z}_m\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{z}_m\|^2} \begin{bmatrix} x_m^* & x_{m+1}^* & x_{m+2}^* & \cdots & x_{m+K-1}^* \\ x_{m+1}^* & x_{m+2}^* & x_{m+3}^* & \cdots & x_{m+K}^* \\ x_{m+2}^* & x_{m+3}^* & x_{m+4}^* & \cdots & x_{m+K+1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m+K-1}^* & x_{m+K}^* & x_{m+K+1}^* & \cdots & x_{m+K+K-1}^* \end{bmatrix} \quad (9)$$

Daha sonra, Denklem (9)'da gösterildiği gibi, okların doğrultusundaki matris elemanlarının toplamları,

$$\begin{aligned} \tilde{r}_z[0] &= \frac{1}{\|\mathbf{z}_m\|^2} (x_m^*x_m^* + x_{m+1}^*x_{m+1}^* + x_{m+2}^*x_{m+2}^* + \dots + x_{m+K-1}^*x_{m+K-1}^*) \\ \tilde{r}_z[-1] &= \frac{1}{\|\mathbf{z}_m\|^2} (x_m^*x_{m+1}^* + x_{m+1}^*x_{m+2}^* + \dots + x_{m+K-2}^*x_{m+K-1}^*) \\ \tilde{r}_z[1] &= \frac{1}{\|\mathbf{z}_m\|^2} (x_{m+1}^*x_m^* + x_{m+2}^*x_{m+1}^* + \dots + x_{m+K-1}^*x_{m+K-2}^*) \end{aligned} \quad (10)$$

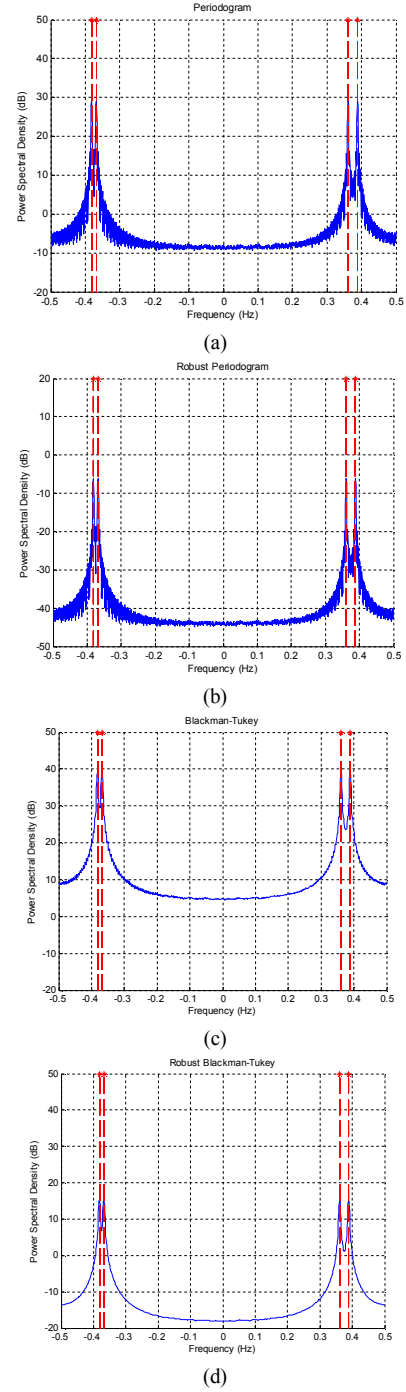
şeklinde yeni gürbüz özilinti fonksiyonu kestiricisinin, $\tilde{r}_{zz}[k]$, örneklerini vermektedir.

III. BENZETİM SONUÇLARI

Performans karşılaştırması için üretilen veri, X_n , [9] ile aynı olup, gürültü, W_n , altında 4 sinüzoid içermektedir

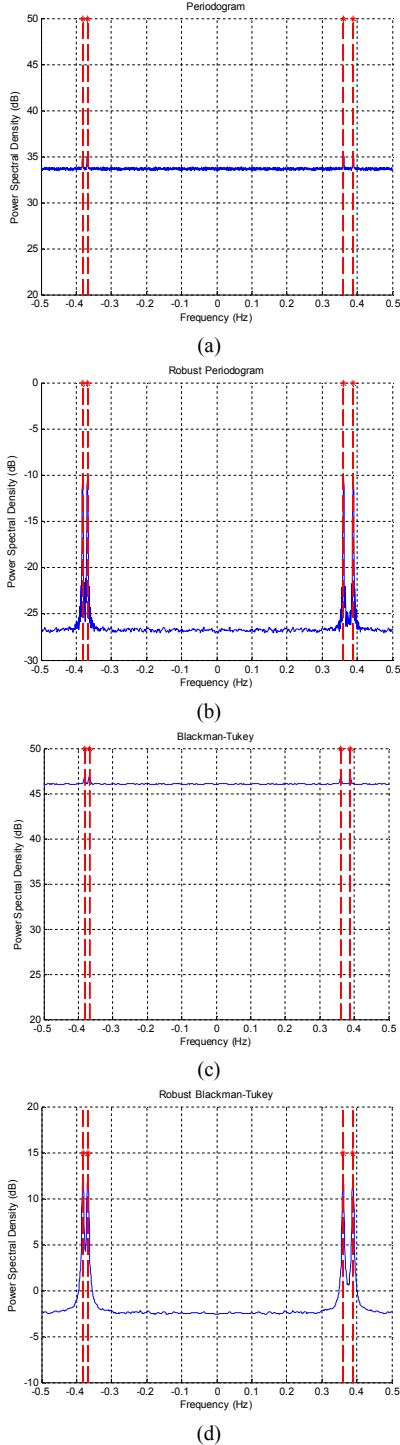
$$X_n = \sum_{i=1}^p A_i e^{j\omega_i n + \Phi_i} + W_n \quad (11)$$

Yukarıda Φ_i , $[-\pi, \pi]$ arasında düzgün (uniform) dağılıma sahip olan bir rastgele değişkendir. Üretilen veri, $n = 1, \dots, 300$ olmak üzere 300 tanedir. Denklem (11)'de p parametresi sinüzoidlerin sayısını göstermekte olup bu çalışmada $p = 4$ 'tür. Sinüzoidlerin açısal frekansları, sırasıyla $\omega_1 = \frac{91}{72}\pi$, $\omega_2 = \frac{89}{72}\pi$, $\omega_3 = \frac{14}{18}\pi$ ve $\omega_4 = \frac{13}{18}\pi$ rad/s. olarak alınmıştır. Tüm sinüzoidlerin genlikleri $A_i = \sqrt{50}$ olarak seçilmiştir. Blackman-Tukey yöntemi için Bartlett (üçgen) penceresi kullanılmış ve Denklem (2)'deki M değeri 200 olarak seçilmiştir.



Şekil 1: Gauss süreci altında; a) Periodogram, b) Gürbüzleştirilmiş periodogram, c) Blackman-Tukey, d) Gürbüzleştirilmiş Blackman-Tukey.

W_n iki farklı olasılıksal süreç olarak modellenmiş olup, bunlardan ilki ortalaması 0 değıştisi 1 olan bir Gauss süreci, diğeri ise ortancası (median) 0 olan kuyruklu (heavy-tailed) Cauchy sürecidir. Bu çalışmada önerilen gürbüzleştirilmiş spektrum kestirim yöntemlerinin



Şekil 2: Kuyruklu (heavy-tailed) Cauchy süreci altında;
a) Periodogram, b) Gürbüzleştirilmiş periodogram, c) Blackman-Tukey,
d) Gürbüzleştirilmiş Blackman-Tukey.

performansı her iki olasılıksal süreç için klasik parametrik olmayan yöntemlerin performanslarıyla karşılaştırılmıştır.

Şekil 1’de Gauss olasılıksal süreci altında periodogram ve Blackman-Tukey yöntemleri ile spektrum kestirimi

yapılmıştır. Şekil 1 (a) ve (c)’de klasik yöntemler, Şekil 1 (b) ve (d)’de gürbüzleştirilmiş periodogram ve Blackman-Tukey yöntemleri ile spektrum kestirimi yapılmıştır. Gerçek frekans değerleri tüm şekillerde kesikli çizgi ile gösterilmiştir. Şekil 1 (a) ve (b)’de görüldüğü gibi Gauss süreci altında gürbüz parametrik olmayan spektrum kestirimi ile klasik spektrum kestirimi aynı sonucu vermiştir. Şekilde 2’de ise kuyruklu (heavy-tailed) dağılıma sahip olan Cauchy olasılıksal süreci altında periodogram ve Blackman-Tukey yöntemleri ile spektrum kestirimi yapılmıştır. Şekil 2 (a) ve (c)’de klasik yöntemler, Şekil 2 (b) ve (d)’de ise gürbüz periodogram ve Blackman-Tukey yöntemi ile spektrum kestirimi yapılmıştır. Şekillerde görüldüğü gibi, klasik yöntemler kuyruklu dağılıma sahip süreç altında başarısız olurken, gürbüzleştirilmiş parametrik olmayan yöntemler çok daha iyi sonuç vermektedirler.

IV. SONUÇ

Bu çalışmada, Gauss dağılımına sahip olmayan ortamlarda spektrum kestirimi yapabilmek için örnek uzamsal işaret ortak değışinti matrisinden elde edilen özilinti fonksiyonu kestiricisi kullanılarak gürbüz parametrik olmayan spektrum kestirimi önerilmiştir. Önerilen gürbüzleştirilmiş yöntemler ve klasik yöntemler, Gauss dağılımı altında benzer sonuçlar vermiş, fakat Gauss olmayan ortamlarda önerilen gürbüzleştirilmiş parametrik olmayan spektrum kestirim yöntemleri klasik yöntemlere göre daha başarılı olmuştur. Gelecekte, bu çalışmada önerilen yöntemin özbağlanımlı (AR) spektrum kestirim yöntemlerine genelleştirilmesi üzerinde çalışılması planlanmaktadır.

KAYNAKÇA

- [1] Zoubir, Abdelhak M., et al. “Robust estimation in signal processing: A tutorial-style treatment of fundamental concepts.” *IEEE Signal Processing Magazine*, 29.4 (2012): 61-80.
- [2] Kay, S. M. “Modern Spectral Estimation: Theory and Application.” *Englewood Cliffs, NJ*, 1988.
- [3] Li, T.-H. “A nonlinear method for robust spectral analysis.” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 58.5 (2010): 2466-2474.
- [4] Kassam, S. A. and Poor, H. V. “Robust techniques for signal processing: A survey.” *Proc. of the IEEE*, 73.3 (1985): 433-481.
- [5] Martin, R. D. and Thomson, D J., “Robust-resistant spectrum estimation.” *Proceedings of the IEEE* 70.9 (1982): 1097-1115.
- [6] Spangl, B. and Dutter R., “Estimating spectral density functions robustly.” *REVSTAT-Statistical Journal*, 5.1 (2007): 41-61.
- [7] Nirel, R., Muggleston, M. A. and Barnett, V. “Outlier-robust spectral estimation for spatial lattice processes.” *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 27.12 (1998): 3095-3111.
- [8] Ma, Y. and Genton, M. G. “Highly robust estimation of the autocovariance function.” *Journal of Time Series Analysis*, 21.6 (2000): 663-684.
- [9] Visuri, S., Oja H. and Koivunen, V., “Nonparametric statistics for subspace based frequency estimation.” *Proc. of the EUSIPCO Conference, Tampere, Finland*, 2000.